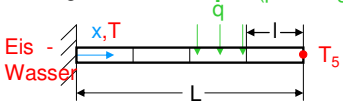
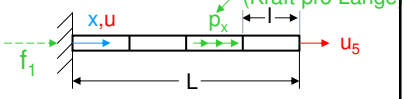
Analogie: Wärmeleitung – Strukturmechanik (DGL – FEM)

Wärmeleitungsproblem	Analogie	Dehnstabproblem
Wärmeleitfähigkeit → λA		Dehnsteifigkeit → EA
Wärmemenge pro Zeit (pro Länge) $\dot{q}$		Streckenlast (Kraft pro Länge) p_x



System



$(\lambda A T')' + \dot{q} = 0$	DGL	$(EA u')' + p_x = 0$
$T(0)=0$; $\dot{Q}(L)=0$ 3.Element	RB	$u(0)=0$; $F_N(L)=0$ 3.Element
$\frac{\lambda A}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_l \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_l \\ \dot{Q}_r \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{\dot{q} l}{2} \\ \frac{\dot{q} l}{2} \end{bmatrix}$	Element	$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_l \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Nl} \\ F_{Nr} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{p_x l}{2} \\ \frac{p_x l}{2} \end{bmatrix}$
$\mathbf{H}_e \mathbf{T}_e = \dot{\mathbf{Q}}_e$	FEM	$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e$

$\mathbf{H}_e$ Wärmeleitungsmatrix
$\mathbf{T}_e$ Knotenpunkt-Temperaturen
$\dot{\mathbf{Q}}_e$ Knotenpunkt-Wärmeflüsse

$\mathbf{K}_e$ Elemensteifigkeitsmatrix
$\mathbf{u}_e$ Knotenpunkt-Verschiebungen
$\mathbf{f}_e$ Knotenpunkt-Kräfte

Analogie: Wärmeleitung – Strukturmechanik (DGL – FEM)

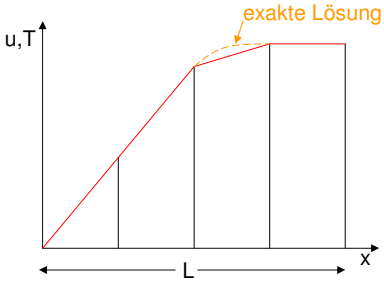
Wärmeleitungsproblem | Analogie | Dehnstabproblem

$$\frac{\lambda A}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1=0 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ 0 \\ \dot{q}l/2 \\ \dot{q}l/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gesamtsystem

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1=0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ p_x l/2 \\ p_x l/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

reduziertes Gleichungssystem



Randbedingung Wärmeleitung:
(Dirichlet) 1. Art T_{Rand} = Temperatur in K
(Neuman) 2. Art $\dot{q}_{Rand}$ = Wärmestromdichte in W/m²
(Robin) 3. Art $\dot{q}_{Rand} = \alpha(T_{Rand} - T_{Fern})$: Konvektion
Immer nur eine Randbedingung am einem Rand!

Randbedingung Strukturmechanik:
(Dirichlet) 1. Art u_{Rand}= Verschiebung in m
(Neuman) 2. Art σ_{Rand}= Spannung in N/m² (Kraftrand)
(Robin) 3. Art $\sigma_{Bett} = c_{Bett} u_{Rand}$: elastische Bettung