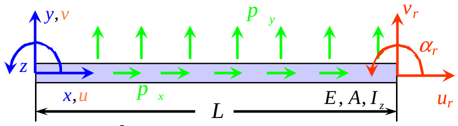
Allgemeine Energieformulierung für Statik, Dynamik und Stabilität

zur Ableitung der Elementmatrizen eines Dehnstab-Balken-Elementes

Prof. Dr.-Ing. H.-D. Kleinschrodt, BeuthHS Berlin, FB VIII

Dehnstab-Balken-Element



Gesamtes Potential

$$\prod = \underbrace{\prod_i}_{E_{def} + E_{kin}} + \underbrace{\prod_a}_{-W_a} = \sum_e \Pi^e$$

Summe über die Elemente

Deformationsenergie – kinetische Energie – Arbeit der äußeren Lasten

---

$$E_{def}^e = \tfrac{1}{2}\int_0^L EA u'^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_0^L EI_z v''^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_0^L F_N v'^2 dx$$

$$E_{kin}^e = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho A \dot{u}^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx$$

$$W_a^e = \underbrace{\int_0^L p_x u \; dx}_{\text{Dehnstab}} + \underbrace{\int_0^L p_y v \; dx}_{\text{Balken}}$$

Theorie 1. Ordnung – Theorie 2. Ordnung

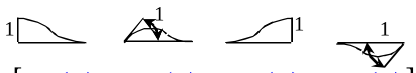
Ansatzfunktionen Dehnstab:

$$u(x,t) = \left[N_1(x) \quad N_2(x)\right] \begin{bmatrix} u_\ell(t) \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

$$u = \underline{N}_D^T \underline{d}_D \qquad u' = \underline{N}'^T_D \underline{d}_D$$

$$u^T = \underline{d}_D^T \underline{N}_D \qquad \dot{u} = \underline{N}_D^T \underline{\dot{d}}_D$$

Ansatzfunktionen Balken:



$$v(x,t) = \left[N_3(x) \quad N_4(x) \quad N_5(x) \quad N_6(x)\right] \begin{bmatrix} v_\ell(t) \\ \alpha_\ell(t) \\ v_r(t) \\ \alpha_r(t) \end{bmatrix}$$

$$v = \underline{N}_B^T \underline{d}_B \qquad v' = \underline{N}'^T_B \underline{d}_B \qquad v'' = \underline{N}''^T_B \underline{d}_B$$

$$v^T = \underline{d}_B^T \underline{N}_B \qquad \dot{v} = \underline{N}_B^T \underline{\dot{d}}_B \qquad \ddot{v} = \underline{N}_B^T \underline{\ddot{d}}_B$$

$$\int_0^L EA u'^2 dx = \int_0^L u'^T EA u' dx = \underline{d}_D^T \underbrace{\int_0^L \underline{N}'_D EA \underline{N}'^T_D dx}_{\underline{\underline{K}}_D = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \underline{d}_D$$

$$\int_0^L \rho A \dot{u}^2 dx = \int_0^L \dot{u}^T \rho A \dot{u} dx = \underline{\dot{d}}_D^T \underbrace{\int_0^L \underline{N}_D \rho A \underline{N}_D^T dx}_{\underline{\underline{M}}_D = \frac{\rho A L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \underline{\dot{d}}_D$$

$$\int_0^L p_x u \; dx = \overbrace{\int_0^L p_x \underline{N}_D^T dx}^{\underline{f}_D^T} \underline{d}_D$$

$$\int_0^L EI_z v''^2 dx = \int_0^L v''^T EI_z v'' dx = \underline{d}_B^T \underbrace{\int_0^L \underline{N}''_B EI_z \underline{N}''^T_B dx}\, \underline{d}_B$$

$$\underline{\underline{K}}_B = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sym. & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx = \int_0^L \dot{v}^T \rho A \dot{v} dx = \underline{\dot{d}}_B^T \underbrace{\int_0^L \underline{N}_B \rho A \underline{N}_B^T dx}\, \underline{\dot{d}}_B$$

$$\underline{\underline{M}}_B = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L^2 \\ sym. & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^L p_y v \; dx \; = \; \overbrace{\int_0^L p_y \underline{N}_B^T dx}^{\underline{f}_B^T}\, \underline{d}_B$$

$$W_a^e = \begin{bmatrix} \underline{f}_D^T & \underline{f}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_D \\ \underline{d}_B \end{bmatrix} = \underline{f}^{eT} \underline{d}^e$$

$$E_{kin}^e = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \underline{\dot{d}}_D^T & \underline{\dot{d}}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_D & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{d}}_D \\ \underline{\dot{d}}_B \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\underline{\dot{d}}^{eT} \underline{\underline{M}}^e \underline{\dot{d}}^e$$

$$E_{def}^{e\,1.Ord.} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \underline{d}_D^T & \underline{d}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_D & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_D \\ \underline{d}_B \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\underline{d}^{eT} \underline{\underline{K}}^e \underline{d}^e$$

$$\int_0^L F_N v'^2 dx = \int_0^L v'^T F_N v' dx = \underline{d}_B^T \underbrace{\int_0^L \underline{N}'_B F_N \underline{N}'^T_B dx}_{\underline{\underline{G}}_B}\, \underline{d}_B$$

Geometrische Matrix:

$$\underline{\underline{G}}_B = F_N \int_0^L \begin{bmatrix} N_3'N_3' & N_3'N_4' & N_3'N_5' & N_3'N_6' \\ N_4'N_3' & N_4'N_4' & N_4'N_5' & N_4'N_6' \\ N_5'N_3' & N_5'N_4' & N_5'N_5' & N_5'N_6' \\ N_6'N_3' & N_6'N_4' & N_6'N_5' & N_6'N_6' \end{bmatrix} dx = \frac{F_N}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & -3L \\ sym. & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$E_{def}^{e\,2.Ord.} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \underline{d}_D^T & \underline{d}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_D \\ \underline{d}_B \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\underline{d}^{eT} \underline{\underline{G}}^e \underline{d}^e$$

Stationaritätsforderung: $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \underline{d}} = \underline{0}$

falls kinetische Anteile vorhanden: $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \underline{d}} = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\Pi}{\frac{\partial \underline{d}}{\partial t}} = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \Pi}{\partial \underline{\dot{d}}}$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{d}} + \left\{\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{G}}\right\}\underline{d} = \underline{f}$$

Statische Stabilitätsberechnung:

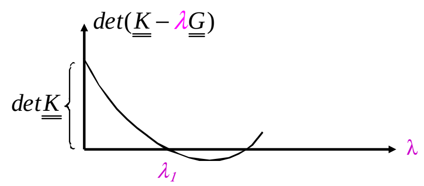
1. Schritt: Statische Berechnung (in ANSYS mit Schalter SSTIF,on)

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{d}_0 = \underline{f}_0$$

2. Schritt: Geometrische Matrix wird aus den Normalkräften F_{N0} bzw. den Normalspannungen des 1. Schrittes berechnet.
   Gesucht wird der Lasterhöhungsfaktor λ

$$\left\{\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{G}}\right\}\underline{d} = \underline{0} \qquad \text{(EWP)}$$

Nichttriviale Lösung: $det(\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{G}}) = 0$



Bei $\lambda = \lambda_1$ ist die Gesamtmatrix singulär.
Die Eigenform $\underline{d}_1$ (1. Knick- oder Beulform) ist nur bis auf einen Faktor bestimmbar:

$$\left\{\underline{\underline{K}} - \lambda_1 \underline{\underline{G}}\right\}\underline{d}_1 = \underline{0}$$