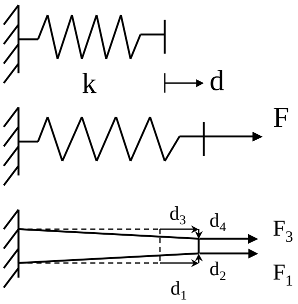
Theorie - Grundlagen - FEM

Prof. Dr.-Ing. H.-D. Kleinschrodt

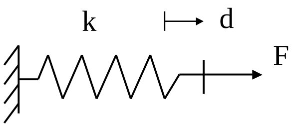
Phänomenologische Einführung

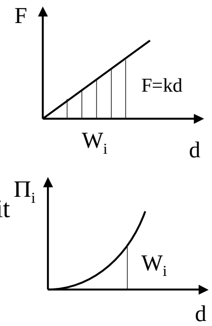


$$kd = F$$

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{d} = \underline{f}$$

Potentialformulierung

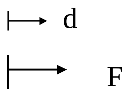


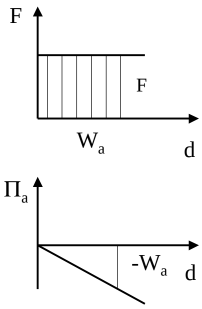


Inneres Potential der Feder entspricht Formänderungsarbeit

$$\Pi_i = W_i = \frac{1}{2} k d^2$$

Potential einer Einzelkraft entspricht negativer äußerer Arbeit



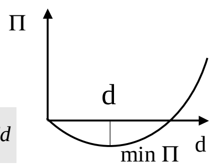


$$\Pi_a = -W_a = -Fd$$

Elastisches Potential entspricht Summe

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k d^2 - Fd$$



Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}d} = 0 \qquad kd - F = 0$$

Lösung: $d=k^{-1}F$

Variationsprinzip

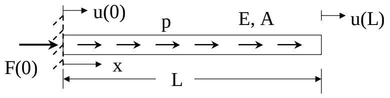
$$\delta J = 0$$

δ. Variations-Delta
J Funktional d.h. Funktion von Funktionen

Die erste Variation des Funktionals J ist stationär.

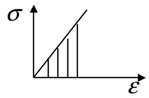
Klassisch: Funktionen über gesamten Bereich, Ritz-Verfahren
FEM: Funktionen über Teilbereiche, Finite-Element

Beispiel: Dehnstab mit Streckenlast



Inneres Potential eines Dehnstabes

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int \varepsilon\sigma dV$$



$\sigma = E\varepsilon$ Spannung=Elastizitätsmodul*Dehnung
$\varepsilon = u'$ Dehnung=*du/dx*
u(x) Verschiebungsfunktion
dV=Adx Volumenelement=Querschnittsfläche**dx*

Potential der äußeren Lasten

$$\Pi_a = -\int pu \,\mathrm{dx} - \Sigma \mathrm{F}_j d_j$$

p Längsstreckenlast
Fj Einzellast am Freiheitsgrad *dj*

Elastisches Potential=Funktional

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = J$$

Diskretisierung bei FEM

Der gesamte Bereich wird in endliche, finite Elemente unterteilt. Die gesuchte Verschiebungsfunktion wird über die Elemente durch Ansatzfunktionen angenähert, die als Freiheitsgrade die Element-Knotenverschiebungen $\underline{\boldsymbol{d}}_e$ besitzen. Benachbarte Elemente haben an den gemeinsamen Knoten die gleichen Freiheitsgrade und gewähren einen stetigen Verschiebungsverlauf im gesamten Bereich.

Dadurch ist aus einem System mit unendlich vielen Freiheitsgraden eines mit endlich vielen, diskreten Freiheitsgraden d_i (i=1..n) geworden.

Die 1. Variation lautet

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial d_1}\delta d_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial d_2}\delta d_2 + \dots$$

Diese ist nur dann Null, wenn alle

$$\frac{\partial\Pi}{\partial d_i} = 0 \qquad i = 1 \dots n$$

d.h., es stehen n Gleichungen für die Berechnung der n unbekannten Freiheitsgrade d_i zur Verfügung.

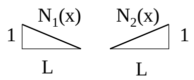
Lineare Ansatzfunktion

Ansatz: $u(x) = a_0 + a_1 x$

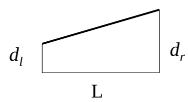
Anpassung: $u(0) = d_l \rightarrow a_0 = d_l$

$u(L) = d_r \rightarrow a_1 = -\frac{d_l}{L} + \frac{d_r}{L}$

angepasster Ansatz: $u(x) = (1 - \frac{x}{L})d_l + \frac{x}{L}d_r$



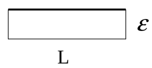
$u(x) = N_1(x)d_l + N_2(x)d_r$



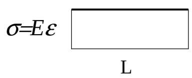
Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = u' = N_1'd_l + N_2'd_r$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{L}d_l + \frac{1}{L}d_r = \frac{d_r - d_l}{L}$$



Lineare Verschiebungsansatz:
Dehnung=konstant
Spannung=konstant
über Elementlänge



$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int \varepsilon\sigma dV = \frac{1}{2}\int \varepsilon E\varepsilon A dx = \frac{1}{2}EA\int \varepsilon^2 dx = \frac{1}{2}EA\int\left(\frac{d_r-d_l}{L}\right)^2 dx$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2}EA\left(\frac{d_r-d_l}{L}\right)^2\int_0^L dx = \frac{1}{2}EA\left(\frac{d_r-d_l}{L}\right)^2 x\Big|_0^L = \frac{1}{2}\frac{EA}{L}(d_r^2-2d_rd_l+d_l^2)$$

$$\Pi_a = -\int pu\,dx - F_ld_l = -\int p\left[(1-\frac{x}{L})d_l+\frac{x}{L}d_r\right]dx - F_ld_l = -(\frac{pL}{2}d_l+\frac{pL}{2}d_r)-F_ld_l$$

$\frac{\partial\Pi}{\partial d_l}=0:$ $\quad +\frac{EA}{L}d_l-\frac{EA}{L}d_r-\frac{pL}{2}-F_l=0$

$\frac{\partial\Pi}{\partial d_r}=0:$ $\quad -\frac{EA}{L}d_l+\frac{EA}{L}d_r-\frac{pL}{2}=0$

2 Gleichungen für 2 Unbekannte d_l und d_r

Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & +\frac{EA}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_l \\ d_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{pL}{2}+F_l \\ \frac{pL}{2}\end{bmatrix}$$

Gleichungssystem so nicht lösbar (singulär)

Randbedingung: $u(0)=0; \rightarrow d_l=0$

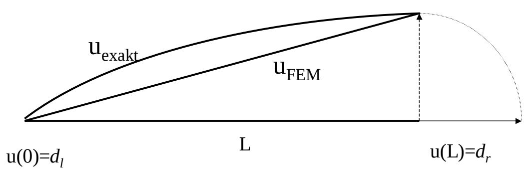
Gl.1 streichen (F_l ?) Gleichungssystem regulär

Lösung: $d_r = \frac{pL^2}{2EA}$ aus Gl. 2

aus Gl. 1 $F_l = -pL$ Lagerkraft F(0)

Vergleich mit exakter Lösung

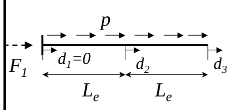
DGL: $F_N' = (\sigma A)' = (E\varepsilon A)' = (EAu')' = p$



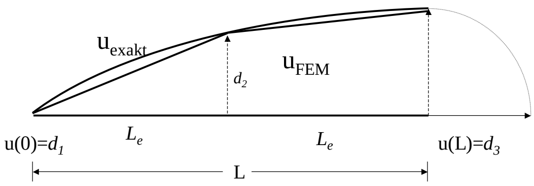
DGL: Gleichgewicht in jedem Punkt des Bereiches
FEM: Gleichgewicht im Element nur im Mittel erfüllt

Verbesserung der FEM-Lösung

2 Elemente:



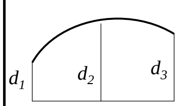
$$\frac{EA}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 1+1 & -1 \\ & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pL_e/2+F_1 \\ pL_e \\ pL_e/2\end{bmatrix}$$

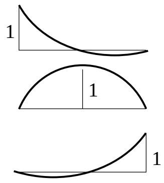


Qudratische Ansatzfunktion

Ansatz: $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

angepasster Ansatz: $u(x) = N_1(x)d_1 + N_2(x)d_2 + N_3(x)d_3$





$N_1 = 1-3\left(\frac{x}{L}\right)+2\left(\frac{x}{L}\right)^2$

$N_2 = 4\left(\frac{x}{L}-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$

$N_3 = -\left(\frac{x}{L}\right)+2\left(\frac{x}{L}\right)^2$

Dehnung: (linear) $\varepsilon = u' = N_1'd_1 + N_2'd_2 + N_3'd_3$ $\quad B_i = N_i'$

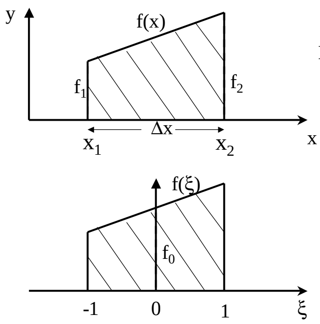
$$\varepsilon = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3\end{bmatrix} = \underline{B}\underline{d}_e \qquad \varepsilon^T = \underline{d}_e^T\underline{B}^T$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int \varepsilon^T\sigma dV = \frac{1}{2}\int \varepsilon^T E\varepsilon dV = \frac{1}{2}\underline{d}_e^T\int \underline{B}^T E\underline{B} dV\,\underline{d}_e$$

Element-Steifikeits-matrix

$$EA\int_0^{L_e}\begin{bmatrix} B_1B_1 & B_1B_2 & B_1B_3 \\ B_2B_1 & B_2B_2 & B_2B_3 \\ B_3B_1 & B_3B_2 & B_3B_3\end{bmatrix}dx = \underline{\underline{K}}_e$$

Bereichsintegrale, Gaußpunkte

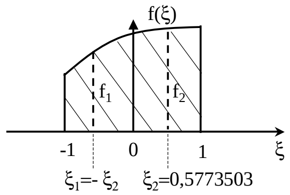


$I_x=(f_1+f_2)\Delta x/2$

$$I_x = I_\xi \underbrace{\Delta x/2}_{\text{Skalierung}}$$

$I_\xi=f_0\ 2$

Die Integration wird auf eine Funktions-Auswertung an der Stelle 0 reduziert

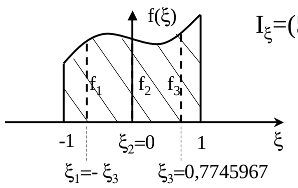


$I_\xi=1*f_1+1*f_2$

Exakt für alle Polynome bis 3. Grades

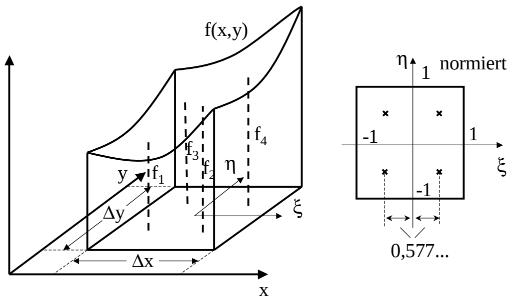
Exakt für alle Polynome bis 5. Grades:

$I_\xi=(5/9)*f_1+(8/9)*f_2+(5/9)*f_3$



An den Gauß-Punkten ξ_i erfolgen alle Auswertungen, z. B. Spannungsberechnungen

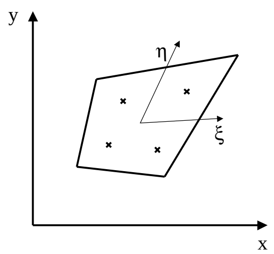
2D Bereichsintegrale



$I_{xy}=(f_1+f_2+f_3+f_4)\Delta x\ \Delta y\ /4$

$I_\xi=f_1+f_2+f_3+f_4$

$I_{xy}= I_\xi\Delta x\ \Delta y\ /4$



$$I_{xy}= I_\xi \underbrace{\det \underline{J}}_{\text{Skalierung}}$$

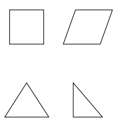
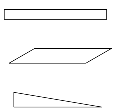
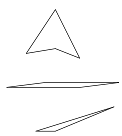
Jakobi-Determinante

$$\det \underline{\underline{J}} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Die Jakobi-Determinante gibt die Richtungs- und Streckungsverhältnise der realen Elementgeometrie gegenüber dem normierten Integrationsbereich wider

Beispiel: achsenparalleles Rechteck $\det \underline{\underline{J}} = \det \begin{bmatrix} \Delta x/2 & 0 \\ 0 & \Delta y/2 \end{bmatrix} = \dfrac{\Delta x \Delta y}{4}$

Beurteilung der Elementformen

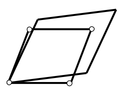
Beurteilung	günstig	ungünstig	verboten
Elemente			
Ansys-Meldung	keine	Warnung	Fehler

Schalen mit 4 Ecken dürfen zusätzlich nicht zu stark verwölbt sein

Isoparametrische Elemente

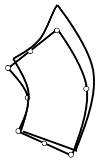
Der Polynomgrad der Elementberandung und der Ansatzfunktion sind gleich

linear Verschiebungsansatz
lineare Elementberandung



	neu
PLANE42	182
SHELL63	181
SOLID45	185

quadratischer Verschiebungsansatz
quadratischer Elementberandung



	neu
PLANE82	183
SHELL93	281
SOLID95	186