

Fibonacci-Folge

Grundlegendes

Leonardo Pisano, besser bekannt als Leonardo Fibonacci (filius Bonacci lat. Sohn des Bonacci), wurde ca. 1170 in Pisa geboren. Pisano zählt zu den bedeutendsten Mathematikern des Mittelalters. Sein Buch "Liber abaci" enthält fast das gesamte Wissen jener Zeit über Arithmetik und Algebra. Das 1202 geschriebene Buch ist für die Entwicklung der Mathematik in den folgenden Jahrhunderten von großer Bedeutung und es trägt dazu bei, dass die arabischen Ziffern in Europa bekannt werden. Eine Aufgabe aus "Liber abaci" beschäftigt sich mit der Frage wie viele Kaninchenpaare von einem Kaninchenpaar in einem Jahr erzeugt werden. Die Lösung dieser Aufgabe führt auf eine Zahlenfolge, welche als Fibonacci-Folge bezeichnet wird.

Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine reelle Zahlenfolge, bei der die Summe von zwei aufeinander folgenden Folgengliedern das nächste Folgenglied ergibt. Die Startwerte sind Null und Eins. Man kann die Fibonacci-Folge auch mit den Werten Eins und Eins beginnen, also um einen Index versetzt.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Tabelle der ersten zwanzig Fibonacci-Zahlen

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	...

Neben der rekursiven Darstellung existiert eine explizite Darstellung, die so genannte Formel von Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Eine der zahlreichen Eigenschaften der Fibonacci-Folge ist die folgende Beziehung

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Die Folgen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen besitzen interessante Eigenschaften.

$$q_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}, \quad \tilde{q}_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}	...
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{21}{34}$	$\frac{34}{55}$	$\frac{55}{89}$	$\frac{89}{144}$	$\frac{144}{233}$...
0	1	0.5	0.667	0.600	0.625	0.61538	0.61905	0.61765	0.61818	0.61798	0.61806	0.61803	...
	1		0.667		0.625		0.61905		0.61818		0.61806		...
0		0.5		0.600		0.61538		0.61765		0.61798		0.61803	...

\tilde{q}_0	\tilde{q}_1	\tilde{q}_2	\tilde{q}_3	\tilde{q}_4	\tilde{q}_5	\tilde{q}_6	\tilde{q}_7	\tilde{q}_8	\tilde{q}_9	\tilde{q}_{10}	\tilde{q}_{11}	\tilde{q}_{12}	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{89}{55}$	$\frac{144}{89}$	$\frac{233}{144}$	$\frac{377}{233}$...
1	2	1.5	1.667	1.600	1.625	1.61538	1.61905	1.61765	1.61818	1.61798	1.61806	1.61803	...
	2		1.667		1.625		1.61905		1.61818		1.61806		...
1		1.5		1.600		1.61538		1.61765		1.61798		1.61803	...

Die Teilfolgen $(q_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{q}_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ mit ungeraden Indizes sind streng monoton fallend. Die Teilfolgen $(q_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{q}_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit geraden Indizes sind streng monoton wachsend. Dabei gilt für die Folgen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils, dass ein beliebiges Folgenglied mit ungeradem Index größer ist als jedes Folgenglied mit geradem Index.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 0.618033988 \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{q}_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988 \dots$$

Die Folgen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzen irrationale Grenzwerte.

Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt

Der Goldene Schnitt ist ein bestimmtes Verhältnis zweier Zahlen. Zwei Strecken stehen im Verhältnis des goldenen Schnitts, wenn sich die Summe beider Strecken zur größeren Strecke genauso verhält, wie die größere Strecke zur kleineren Strecke.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$



Durch Umformen erhält man

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow (a+b) \cdot b = a^2 \Leftrightarrow ab + b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Substitution von $x = \frac{a}{b}$ ergibt die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Somit erhält man

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{q}_n = 1.618033988 \dots$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \right) = -0.618033988 \dots$$

Die irrationale Zahl x_1 entspricht dem oben beschriebenen Verhältnis des Goldenen Schnitts und die irrationale Zahl $(-x_2)$ entspricht dem Kehrwert. Leider werden in der Literatur die Goldenen Schnittzahlen nicht einheitlich beschrieben. So kommt es vor, dass nur x_1 oder nur $(-x_2)$ oder beide Zahlen als Goldene Schnittzahl bezeichnet werden.

Die Quotienten q_n und \tilde{q}_n von aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen streben für $n \rightarrow \infty$ gegen die Goldenen Schnittzahlen x_1 und $(-x_2)$. Bemerkenswert ist, dass auch für kleine n diese Quotienten sehr gute Approximationen der Goldenen Schnittzahlen sind. Zu keinem Quotienten existiert ein rationaler Bruch mit kleinerem Nenner, der die jeweilige Goldene Schnittzahl besser approximiert. Das hängt mit den Eigenschaften der Näherungsbrüche eines Kettenbruchs zusammen.

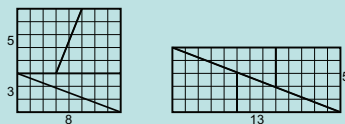
Das Verhältnis des Goldenen Schnitts lässt sich auch auf den Vollkreis übertragen. Teilen die Winkel Ψ und ψ den Vollkreis im Verhältnis des Goldenen Schnitts, so dass $\frac{2\Psi}{\Psi} = \frac{\Psi}{\psi}$ gilt, dann erhält man für den großen Goldenen Winkel Ψ und den kleinen Goldenen Winkel ψ



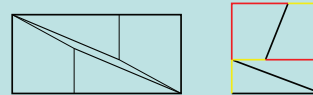
$$\Psi = \pi(-1 + \sqrt{5}) \approx 222.4922^\circ$$

$$\psi = \pi(3 - \sqrt{5}) \approx 137.5078^\circ$$

Aufklärung eines Trugschlusses



Zerschneidet man ein Quadrat mit der Seitenlänge 8 in vier Teile und setzt diese so wie in der obigen Abbildung dargestellt wieder zusammen, so erhält man scheinbar ein Rechteck mit den Seitenlängen 13 und 5. Die Flächeninhalte dieser Figuren unterscheiden sich um eine Flächeneinheit! Bei genauerer Betrachtung des scheinbaren Rechtecks erkennt man, dass sich die Diagonale aus einer Geraden mit der Steigung $\frac{2}{5} = 0.4$ und einer weiteren Geraden mit der Steigung $\frac{3}{8} = 0.375$ zusammensetzt. Die dadurch entstehenden Knicke sind aufgrund der Strichdicke nicht erkennbar.



Die obige linke Abbildung ist nicht maßstabsgerecht, sie veranschaulicht jedoch, dass die neu entstandene Figur kein Rechteck ist. Wählt man für die Seitenlänge des Quadrats Fibonacci-Zahlen, so erkennt man mit Hilfe der bereits erwähnten Beziehung $F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$, dass das scheinbare Rechteck mal um eine Flächeneinheit größer und mal um eine Flächeneinheit kleiner ist als das Quadrat der gewählten Fibonacci-Zahl. Teilt man ein beliebiges Quadrat so, dass die roten und gelben Strecken in der obigen rechten Abbildung im Verhältnis des Goldenen Schnitts sind, dann und nur dann lassen sich die vier Teile zu einem richtigen Rechteck zusammensetzen. In diesem Fall sind die Flächeninhalte beider Figuren gleich groß.

Ausblick

Die Fibonacci-Folge besitzt viele weitere mathematische Eigenschaften. Anwendungen dieser Eigenschaften findet man in den verschiedensten Bereichen, insbesondere in der Blattstellungslehre (Phyllotaxis).

Der so genannte Divergenzwinkel beschreibt den Winkel zwischen zwei nacheinander gewachsenen Blättern (bzw. Blütenblättern). Der Divergenzwinkel ist bei vielen Pflanzen, wie beispielsweise der Sonnenblume, der kleine goldene Winkel ψ . Bei Pflanzen mit irrationalem Divergenzwinkel lassen sich häufig Spiralbildungen erkennen. Markiert man jedes n -te Blütenblatt (Samenkern) im Modell des Blütenstandes der Sonnenblume, wobei n eine Fibonacci-Zahl ist, so erkennt man einen Spiralarm (eine so genannte Parastiche). Die Parastichen zu zwei aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen sind stets gegenläufig. Zur Veranschaulichung diene die folgende Abbildung, in der jeder 34. Samenkern (Abbildung mitte) und jeder 55. Samenkern (Abbildung rechts) schwarz markiert ist. Zwei Samenkern, welche auf einer Parastiche nebeneinander liegen, sind nicht direkt nacheinander gewachsen. Sie wurden im Abstand von n Samenkernen



gebildet. Da n eine Fibonacci-Zahl ist, ist (für nicht zu kleine n) das n -fache des Divergenzwinkels ψ ungefähr ein ganzzahliges Vielfaches von 2π . Daher liegen Samenkern, welche im Abstand von n Samenkernen gewachsen sind, dicht beieinander und werden als zusammengehörend wahrgenommen.

Weitere Anwendungen der Fibonacci-Folge findet man in den Bereichen Geometrie, Kunst, Musik, Architektur, Biologie, Elektrizitätslehre, ...