Fachbereich II – Mathematik - Physik - Chemie

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

03/2010

Karl Michael Ortmann

Das Modell von Neuburger in der Krankenversicherungsmathematik

The Neuburger model in health insurance mathematics
(in German)

Reports in Mathematics, Physics and Chemistry
Berichte aus der Mathematik, Physik und Chemie

ISSN (print): 2190-3913

Reports in Mathematics, Physics and Chemistry

Berichte aus der Mathematik, Physik und Chemie

The reports are freely available via the Internet:
http://www1.beuth-hochschule.de/FB_II/reports/welcome.htm

03/2010, July 2010

Das Modell von Neuburger in der Krankenversicherungsmathematik
The Neuburger model in health insurance mathematics (in German)

Editorial notice / Impressum

Published by / Herausgeber:
Fachbereich II
Beuth Hochschule für Technik Berlin
Luxemburger Str. 10
D-13353 Berlin
Internet: http://public.beuth-hochschule.de/FB_II/
E-Mail: fbiireports@beuth-hochschule.de

ISSN (print): 2190-3913

Zusammenfassung
Neuburger [5] hat in seiner wegweisenden Arbeit ein Modell entwickelt, wodurch Beitrag und Deckungskapital in der Lebensversicherung rekursiv beziehungsweise simultan berechnet werden können. In diesem Artikel übertragen wir dieses Modell auf die Krankenversicherung nach Art der Lebensversicherung. Dadurch wird ein leistungsfähiger Algorithmus hergeleitet, der speziell auf das Problem der Portabilität der Altersrückstellung angewendet werden kann. Somit lassen sich auf elegante Art und Weise ausreichende Prämien für private Krankenversicherungen mit beliebig vertraglich festgelegten Übertragungswerten berechnen.

Schlüsselwörter
Modell von Neuburger, Portabilität der Altersrückstellung, Übertragungswert, Satz von Cantelli

1 Einleitung

Das Modell von Neuburger [5] ist ein Algorithmus zur rekursiven Berechnung von Beitrag und Deckungskapital in der Lebensversicherung. Die Methode basiert auf der Beschreibung von Aufwendungen und Erträgen durch lineare Gleichungen unter Berücksichtigung des Saldoübertrages.

Das Modell von Neuburger ist in der Lebens- und auch Pensionsversicherungsmathematik fest etabliert. Mauermann [4] hat sich in diesem Zusammenhang mit Lösbarkeitskriterien befasst, wohingegen Korter [3] die Lösungsmöglichkeiten auf der Basis linearer Gleichungssysteme und linearer Modelle erweitert hat. Braun [1] hat sich der Behandlung allgemeiner Lebensversicherungen durch lineare Gleichungssysteme gewidmet. Disch [2] hat das Kalkül auf die Ertragswertberechnung und die Überschussbeteilung der Lebensversicherungsmathematik angewendet und in einer Beispielrechnung verdeutlicht. Ziel dieses Artikels ist es, das Modell von Neuburger auf die Krankenversicherungsmathematik zu übertragen.

Für den Basistarif in der privaten Krankenversicherung ist die Portabilität der Altersrückstellung gesetzlich vorgeschrieben worden. Wenn sich die vereinbarten Übertragungswerte an der Altersrückstellung orientieren, so liegt ein rekursiv definiertes mathematisches Problem zur Berechnung der versicherungstechnischen Werte vor. Zur Lösung eignet sich das Modell von Neuburger in besonderem Maße, da mit dieser Methode Beitrag und Altersrückstellungen simultan berechnet werden können.

2 Rekursionsgleichungen der privaten Krankenversicherung

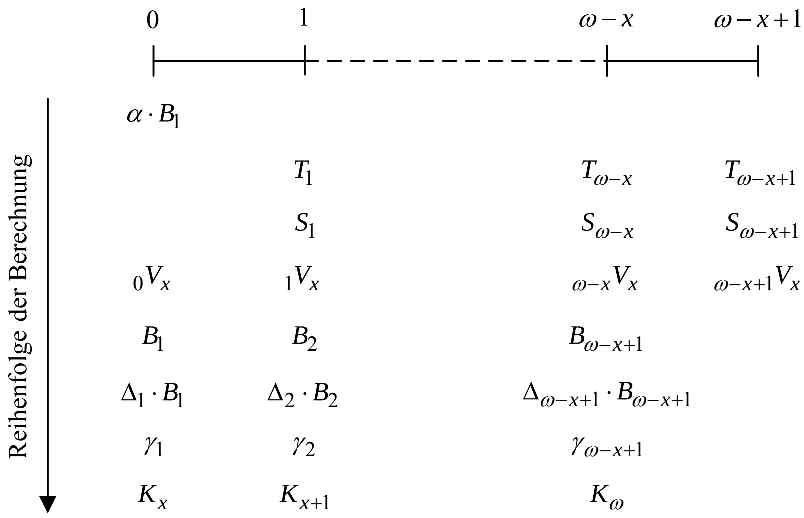
Um das Kalkül von Neuburger auf die Krankenversicherungsmathematik zu übertragen, bedarf es der Herleitung einer verallgemeinerten Rekursionsgleichung für das Deckungskapital. Es sei dazu

- x — das Eintrittsalter des Versicherten
- t — die Zeitpunkte in vollendeten Jahren, ausgehend vom Vertragsbeginn, also $t = 0, \cdots, \omega - x + 1$
- K_{x+t} — der erwartete Kopfschaden eines anfänglich x-jährigen Versicherten im Jahr $[t-1, t)$, kalkulatorisch fällig am Anfang des Jahres, also zum Zeitpunkt t, $t = 0, \cdots, \omega - x - 1$
- T_t — die garantierte Todesleistung, die am Ende des Jahres, also zum Zeitpunkt t, $t = 1, \cdots, \omega - x + 1$, bei Tod innerhalb der Periode $[t-1, t)$ gezahlt wird,
- S_t — die garantierte Stornoleistung, die am Ende des Jahres, also zum Zeitpunkt t, $t = 1, \cdots, \omega - x + 1$, bei Kündigung innerhalb der Periode $[t-1, t)$ gezahlt wird,
- B_t — der Beitrag, der am Anfang des Jahres, also zum Zeitpunkt $t-1$, für die Periode $[t-1, t)$ gezahlt wird, $t = 1, \cdots, \omega - x + 1$
- α, γ_t, Δ_t — die einmaligen unmittelbaren Abschlusskosten sowie der Stückkostenzuschlag und die auf den Jahresbeitrag bezogenen laufenden Kosten, welche am Anfang des Jahres, also zum Zeitpunkt $t-1$, für die Periode $[t-1, t)$ fällig werden, $t = 1, \cdots, \omega - x + 1$
- ${}_tV_x$ — das Bruttodeckungskapital eines x-Jährigen am Ende des Jahres, also zum Zeitpunkt t, $t = 0, \cdots, \omega - x + 1$

Ferner seien q_{x+t} und w_{x+t} die Sterbewahrscheinlichkeit beziehungsweise die Stornowahrscheinlichkeit eines ursprünglich x-jährigen Versicherten im Versicherungsjahr $[t,t+1)$. Die Verbleibewahrscheinlichkeit p_{x+t} ist dann definiert durch

$$p_{x+t} = 1 - q_{x+t} - w_{x+t}$$

Das Endalter ω sei so definiert, dass $p_{\omega} = 0$ ist. Die Versicherten verbleiben demnach höchstens $\omega - x$ volle Versicherungsjahre im Bestand. Der folgende Zahlungsstrahl soll verdeutlichen, wann die einzelnen Positionen fällig sind.



Das Deckungskapital wird zum Ende eines jeden Jahres berechnet, bevor die Beiträge, Kosten und Kopfschäden für das nächste Versicherungsjahr anfallen und nachdem die Übertragungswerte des laufenden Jahres abgerechnet worden sind. Die Schwierigkeit liegt in der korrekten Erfassung der Fälligkeiten und der damit verbundenen Reihenfolge der Berechnung, die in der obigen Skizze deutlich werden.

Allgemein gesehen, ist das prospektive Bruttodeckungskapital einer Krankenversicherung eines x-Jährigen als Differenz aus zukünftiger Leistung und zukünftiger Gegenleistung definiert. Die Versicherungsleistungen setzen sich additiv aus Krankheitskosten, Ausscheideleistungen und Kostenleistungen zusammen. Somit ist für $t = 0, \cdots, \omega - x$

$$\begin{aligned} {}_tV_x = & \sum_{k=0}^{\omega-x-t} K_{x+t+k} \frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t}} + \sum_{k=0}^{\omega-x-t} T_{t+k+1} \frac{D_{x+t+k} \cdot q_{x+t+k} \cdot v}{D_{x+t}} + \sum_{k=0}^{\omega-x-t} S_{t+k+1} \frac{D_{x+t+k} \cdot w_{x+t+k} \cdot v}{D_{x+t}} \\ & + \sum_{k=0}^{\omega-x-t} \Delta_{t+k+1} B_{t+k+1} \frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t}} + \sum_{k=0}^{\omega-x-t} \gamma_{t+k+1} \frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t}} - \sum_{k=0}^{\omega-x-t} B_{t+k+1} \frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t}} \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Analog ist für $t+1$

$${}_{t+1}V_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-t-1} \frac{D_{x+t+k+1}}{D_{x+t+1}} \left(K_{x+t+k+1} + T_{t+k+2} \cdot q_{x+t+k+1} \cdot v + S_{t+k+2} \cdot w_{x+t+k+1} \cdot v + (\Delta_{t+k+2} - 1) B_{t+k+2} + \gamma_{t+k+2} \right).$$

Durch Indexverschiebung erhalten wir

$$
\begin{aligned}
{}_{t+1}V_x = &\sum_{k=1}^{\omega-x-t} K_{x+t+k}\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+1}} + \sum_{k=1}^{\omega-x-t} T_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}\cdot q_{x+t+k}\cdot v}{D_{x+t+1}} + \sum_{k=1}^{\omega-x-t} S_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}\cdot w_{x+t+k}\cdot v}{D_{x+t+1}} \\
&+ \sum_{k=1}^{\omega-x-t}\Delta_{t+k+1}B_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+1}} + \sum_{k=1}^{\omega-x-t}\gamma_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+1}} - \sum_{k=1}^{\omega-x-t} B_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+1}} \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei sich die einzelnen Summen ergänzen lassen, indem jeweils das nullte Glied addiert wird und gesondert subtrahiert wird:

$$
\begin{aligned}
{}_{t+1}V_x = &\sum_{k=0}^{\omega-x-t} K_{x+t+k}\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+1}} + \sum_{k=0}^{\omega-x-t} T_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}\cdot q_{x+t+k}\cdot v}{D_{x+t+1}} + \sum_{k=0}^{\omega-x-t} S_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}\cdot w_{x+t+k}\cdot v}{D_{x+t+1}} \\
&+ \sum_{k=0}^{\omega-x-t}\Delta_{t+k+1}B_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+1}} + \sum_{k=0}^{\omega-x-t}\gamma_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+1}} - \sum_{k=0}^{\omega-x-t} B_{t+k+1}\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+1}} \\
&- K_{x+t}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} - T_{t+1}\frac{D_{x+t}\cdot q_{x+t}\cdot v}{D_{x+t+1}} - S_{t+1}\frac{D_{x+t}\cdot w_{x+t}\cdot v}{D_{x+t+1}} - \Delta_{t+1}B_{t+1}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} - \gamma_{t+1}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} + B_{t+1}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \quad .
\end{aligned}
$$

Hieran erkennen wir den rekursiven Zusammenhang für das Deckungskapital

$$
\begin{aligned}
{}_{t+1}V_x = {}_tV_x\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} - K_{x+t}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} - T_{t+1}\frac{D_{x+t}\cdot q_{x+t}\cdot v}{D_{x+t+1}} - S_{t+1}\frac{D_{x+t}\cdot w_{x+t}\cdot v}{D_{x+t+1}} \\
-\Delta_{t+1}B_{t+1}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} - \gamma_{t+1}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} + B_{t+1}\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \quad .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

In äquivalenter Form ist

$$
{}_tV_x + B_{t+1} = {}_{t+1}V_x\frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}} + K_{x+t} + T_{t+1}\cdot q_{x+t}\cdot v + S_{t+1}\cdot w_{x+t}\cdot v + \Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} \quad ,
$$

und somit haben wir eine wahrscheinlichkeitstheoretische Darstellung gefunden:

$$
{}_tV_x + B_{t+1} = {}_{t+1}V_x\cdot p_{x+t}\cdot v + K_{x+t} + T_{t+1}\cdot q_{x+t}\cdot v + S_{t+1}\cdot w_{x+t}\cdot v + \Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} \quad . \tag{3}
$$

Die Summe aus dem Deckungskapital am Ende des Jahres t und dem Bruttobeitrag am Anfang des folgenden Jahres t+1 ist gleich dem abgezinsten Deckungskapital am Ende des Folgejahres t+1 im Verbleibensfall zuzüglich des erwarteten Kopfschadens und zuzüglich der abgezinsten Übertragungswerte für den Fall des Ausscheidens einschließlich der Kostenleistung am Anfang des folgenden Jahres. Diese Gleichung kann deshalb als verallgemeinerte versicherungsmathematische Bilanzgleichung der Krankenversicherung verstanden werden.

Man erkennt deutliche Analogien zur Lebensversicherungsmathematik. In der Krankenversicherung gibt es neben der Sterbewahrscheinlichkeit die Stornowahrscheinlichkeit als zweite Ausscheideursache. Die erwarteten Kopfschäden entsprechen den Erlebensfallleistungen; jene werden jedoch im Gegensatz zum Kalkül der Lebensversicherungsmathematik vor der Berechnung des Deckungskapitals fällig. Die in der Lebensversicherungspraxis üblichen Todesfallleistungen und Rückkaufswerte sind in der Praxis der privaten Krankenversicherung zurzeit nicht vorgesehen, können aber mit diesem Ansatz mittels der Übertragungswerte berücksichtigt werden.

In alternativer Form lässt sich der Zuwachs des Deckungskapitals darstellen, indem die Gleichung (3) abermals umgestellt wird. In äquivalenter Form erhalten wir durch Auflösen der Verbleibewahrscheinlichkeit und Multiplikation mit $(1+i)$

$$
({}_tV_x + B_{t+1})(1+i) = {}_{t+1}V_x + \left(T_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot q_{x+t} + \left(S_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot w_{x+t} + (1+i)\left(\Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} + K_{x+t}\right) \quad . \tag{4}
$$

Daraus folgt durch Umstellung die verallgemeinerte Thiele'sche Gleichung der privaten Krankenversicherung:

$$ {}_{t+1}V_x - {}_tV_x = i \cdot {}_tV_x + (1+i)\cdot\left(B_{t+1} - \Delta_{t+1}B_{t+1} - \gamma_{t+1} - K_{x+t}\right) + q_{x+t}\left({}_{t+1}V_x - T_{t+1}\right) + w_{x+t}\left({}_{t+1}V - S_{t+1}\right) \quad . \tag{5} $$

Die Änderung des Deckungskapitals entsteht aus dem Zinsertrag bezogen auf die alte Rückstellung und aus dem um die Kosten und Kopfschäden reduzierten, verzinsten Beitrag, zuzüglich der neuen Reserve und abzüglich der erwarteten Versicherungsleistungen für die beiden Fälle des Ausscheidens.

3 Beitragszerlegung

Wird die Bilanzgleichung (3) nach dem Bruttobeitrag umgestellt, so ergeben sich weitere Einsichten. Zunächst haben wir

$$ B_{t+1} = -{}_tV_x + {}_{t+1}V_x \cdot p_{x+t} \cdot v + K_{x+t} + T_{t+1} \cdot q_{x+t} \cdot v + S_{t+1} \cdot w_{x+t} \cdot v + \Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} \quad , $$

und weiterhin folgt durch Auflösen der Verbleibewahrscheinlichkeit:

$$ B_{t+1} = -{}_tV_x + {}_{t+1}V_x \cdot v + K_{x+t} + \left(T_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot q_{x+t} \cdot v + \left(S_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot w_{x+t} \cdot v + \Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} \quad . $$

Wir definieren nun Sparprämie, natürliche Prämie, Vererbungsprämie und Kostenprämie gemäß

$$ B^S_{t+1} = -{}_tV_x + {}_{t+1}V_x \cdot v \quad , $$
$$ B^N_{t+1} = K_{x+t} \quad , $$
$$ B^V_{t+1} = \left(T_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot q_{x+t} \cdot v + \left(S_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot w_{x+t} \cdot v \quad , $$
$$ B^K_{t+1} = \Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} \quad . $$

Die Sparprämie B^S_{t+1} ist für die zinsbereinigte Änderung des Deckungskapitals verantwortlich. Die natürliche Prämie B^N_{t+1} entspricht dem Kopfschaden. Die Kostenprämie B^K_{t+1} dient der Deckung der laufenden Kosten. Die Vererbungsprämie B^V_{t+1} bezieht sich auf die zur Verfügung stehenden Ausscheideleistungen. Sie ist negativ, solange die Übertragungswerte kleiner als das Deckungskapital sind. Durch die Vererbungsprämie kann demnach der beitragsmindernde Effekt, der dadurch zustande kommt, dass keine Übertragungswerte gezahlt werden, quantifiziert werden. Man beachte, dass der absolute Betrag im Verlauf der Vertragslaufzeit beständig ansteigt.

Abschließend formuliert, setzt sich die die Bruttoprämie additiv aus vier Bestandteilen zusammen:

$$ B_{t+1} = B^S_{t+1} + B^N_{t+1} + B^V_{t+1} + B^K_{t+1} \quad . $$

Der Bruttobeitrag kann somit in einen Anteil zerlegt werden, der zur Nivellierung des Beitrags in der Zeit verwendet wird, einen weiteren Anteil, der der Gefahrentragung der Krankheitskostens dient, und einen Anteil, der die laufenden Kosten deckt. Außerdem wird der beitragsmindernde Einfluss der Vererbung deutlich.

4 Ertragsanalyse

Als Ausgangspunkt zur Analyse des Ertrags eines Krankenversicherungsvertrages über den Zeitraum eines Lebensjahres nehmen wir die Gleichung (4). Wir definieren die linke Seite dieser Gleichung als rechnungsmäßige Einnahmen E_t und die rechte Seite als rechnungsmäßige Ausgaben A_t des Versicherungsunternehmens am Ende des Jahres *t*:

$$ E_t = ({}_tV_x + B_{t+1})(1+i) \quad , $$
$$ A_t = {}_{t+1}V_x + \left(T_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot q_{x+t} + \left(S_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot w_{x+t} + (1+i)\left(\Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} + K_{x+t}\right) \quad . $$

Die Differenz G_t aus rechnungsmäßigen Einnahmen und Ausgaben

$$G_t = E_t - A_t$$

ist nach dem Äquivalenzprinzip per definitionem gleich Null. Dabei ist zu beachten, dass nach dem Vorsichtsprinzip die Rechnungsgrundlagen erster Ordnung verwendet werden.

Analog kann man die realistisch zu erwartenden Einnahmen $\tilde{E}_t$ und Ausgaben $\tilde{A}_t$ anhand der Rechnungsgrößen zweiter Ordnung, nämlich mit dem realen Zinssatz $\tilde{i}$ und der wahren Sterbewahrscheinlichkeit $\tilde{q}_{x+t}$, der wirklichen Kündigungswahrscheinlichkeit $\tilde{w}_{x+t}$, den tatsächlichen Kostensätzen $\tilde{\Delta}_{t+1}$ und den wirklichen Stückkosten $\tilde{\gamma}_{t+1}$, angeben

$$\tilde{E}_t = ({}_tV_x + B_{t+1})(1+\tilde{i}) \ ,$$
$$\tilde{A}_t = {}_{t+1}V_x + \left(T_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot \tilde{q}_{x+t} + \left(S_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot \tilde{w}_{x+t} + (1+\tilde{i})\left(\tilde{\Delta}_{t+1}B_{t+1} + \tilde{\gamma}_{t+1} + \tilde{K}_{x+t}\right) \ .$$

In der Praxis entsteht ein erwarteter Gewinn $\tilde{G}_t$ durch die Differenz der tatsächlichen Einnahmen und Ausgaben. Verbindet man beide Gewinngleichungen durch Subtraktion, so folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_t &= \tilde{G}_t - G_t = \tilde{E}_t - E_t + (A_t - \tilde{A}_t) \\
&= ({}_tV_x + B_{t+1})(1+\tilde{i}) - ({}_tV_x + B_{t+1})(1+i) \\
&\quad + {}_{t+1}V_x + \left(T_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot q_{x+t} + \left(S_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot w_{x+t} \\
&\quad - {}_{t+1}V_x - \left(T_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot \tilde{q}_{x+t} - \left(S_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\cdot \tilde{w}_{x+t} \\
&\quad + (1+i)\left(\Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} + K_{x+t}\right) - (1+\tilde{i})\left(\tilde{\Delta}_{t+1}B_{t+1} + \tilde{\gamma}_{t+1} + \tilde{K}_{x+t}\right) \ .
\end{aligned}$$

Ordnen wir die einzelnen Terme nach den Rechnungsgrundlagen, so ist

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_t &= \left(\Delta_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1}\right) - \left(\tilde{\Delta}_{t+1}B_{t+1} + \tilde{\gamma}_{t+1}\right) \\
&\quad + K_{x+t} - \tilde{K}_{x+t} \\
&\quad + \tilde{i}\left({}_tV_x + B_{t+1} - \tilde{\Delta}_{t+1}B_{t+1} - \tilde{\gamma}_{t+1} - \tilde{K}_{x+t}\right) - i\left({}_tV_x + B_{t+1} - \Delta_{t+1}B_{t+1} - \gamma_{t+1} - K_{x+t}\right) \\
&\quad + \tilde{q}_{x+t}\left({}_{t+1}V_x - T_{t+1}\right) - q_{x+t}\left({}_{t+1}V_x - T_{t+1}\right) \\
&\quad + \tilde{w}_{x+t}\left({}_{t+1}V_x - S_{t+1}\right) - w_{x+t}\left({}_{t+1}V_x - S_{t+1}\right) \ .
\end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir schließlich die verallgemeinerte Kontributionsgleichung der Krankenversicherung

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_t &= \left({}_tV_x + B_{t+1} - \tilde{\Delta}_{t+1}B_{t+1} - \tilde{\gamma}_{t+1} - \tilde{K}_{x+t}\right)(\tilde{i} - i) \\
&\quad + \left(K_{x+t} - \tilde{K}_{x+t}\right)(1+i) \\
&\quad + \left({}_{t+1}V_x - T_{t+1}\right)\left(\tilde{q}_{x+t} - q_{x+t}\right) \\
&\quad + \left({}_{t+1}V_x - S_{t+1}\right)\left(\tilde{w}_{x+t} - w_{x+t}\right) \\
&\quad + \left(\Delta_{t+1}B_{t+1} - \tilde{\Delta}_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} - \tilde{\gamma}_{t+1}\right)(1+i) \ .
\end{aligned} \tag{6}$$

Dabei ist

$$\tilde{G}_t^Z = \left({}_tV_x + B_{t+1} - \tilde{\Delta}_{t+1}B_{t+1} - \tilde{\gamma}_{t+1} - \tilde{K}_{x+t}\right)(\tilde{i} - i) \qquad \text{Zinsgewinn}$$

$$\tilde{G}_t^R = \left(K_{x+t} - \tilde{K}_{x+t}\right)(1+i) \qquad \text{Risikogewinn}$$

$$\tilde{G}_t^K = \left(\Delta_{t+1}B_{t+1} - \tilde{\Delta}_{t+1}B_{t+1} + \gamma_{t+1} - \tilde{\gamma}_{t+1}\right)(1+i) \qquad \text{Kostengewinn}$$

$$\tilde{G}_t^S = \left({}_{t+1}V_x - T_{t+1}\right)\left(\tilde{q}_{x+t} - q_{x+t}\right) + \left({}_{t+1}V_x - S_{t+1}\right)\left(\tilde{w}_{x+t} - w_{x+t}\right) \qquad \text{Stornogewinn}$$

Somit lässt sich der erwartete Gewinn eines einzelnen Versicherungsvertrages in die wesentlichen Quellen Zinsgewinn, Sterblichkeitsgewinn, Kostengewinn und Stornogewinn zerlegen. Die Ursache für diese Unternehmensgewinne ist die Verwendung vorsichtiger Rechnungsgrundlagen bei der Beitragskalkulation.

Ein erwarteter Zinsgewinn entsteht, wenn der tatsächlich erzielte Zins auf die Kapitalanlagen größer als der Rechnungszins ist, vorausgesetzt die Basis ist positiv. In der Anfangszeit kann der einzelvertragliche Zinsgewinn negativ sein, da das Bruttodeckungskapital aufgrund der einmaligen Abschlussprovision negativ ist. Der Risikogewinn ist positiv, falls der tatsächliche Kopfschaden geringer ausfällt als der erwartete Kopfschaden. Falls die tatsächlichen Kosten geringer sind als die vorsichtig geschätzten Kosten, so entsteht ein Kostengewinn.

Ein Stornogewinn entsteht, wenn die tatsächliche Sterblichkeit und die tatsächliche Kündigungswahrscheinlichkeit geringer sind als die für die Beitragskalkulation angenommenen Werte. Der Stornogewinn wird umso größer, je kleiner die Übertragungswerte sind. Insbesondere sollte betont werden, dass dem Versicherungsunternehmen durch die derzeit praktizierte Vererbung der Altersrückstellung auf den Bestand Gewinne oder auch Verluste erwachsen können, insofern sich die Rechnungsgrundlagen erster und zweiter Ordnung in Bezug auf die Ausscheidewahrscheinlichkeiten unterscheiden.

5 Rechenvorschriften

Anhand der Formel (3)

$$ {}_tV_x + B_{t+1} = {}_{t+1}V_x \cdot p_{x+t} \cdot v + K_{x+t} + T_{t+1} \cdot q_{x+t} \cdot v + S_{t+1} \cdot w_{x+t} \cdot v + \Delta_{t+1} B_{t+1} + \gamma_{t+1} $$

erkennen wir durch Umstellen den folgenden Zusammenhang

$$ (1-\Delta_{t+1})B_{t+1} + {}_tV_x - {}_{t+1}V_x \cdot p_{x+t} \cdot v = K_{x+t} + T_{t+1} \cdot q_{x+t} \cdot v + S_{t+1} \cdot w_{x+t} \cdot v + \gamma_{t+1} \ , \tag{7} $$

welche für alle $t = 0,\cdots,\omega - x$ gültig ist. Somit haben wir insgesamt $\omega - x + 1$ Gleichungen zur Verfügung. Der Diskontfaktor v, die Sterbewahrscheinlichkeiten q_{x+t}, die Stornowahrscheinlich-keit w_{x+t} und die Überlebenswahrscheinlichkeiten p_{x+t} sind vorgegeben. Sämtliche Kopfschäden K_{x+t} sind bekannt. Die Übertragungswerte T_{t+1} im Todesfall sowie S_{t+1} im Kündigungsfall sind vertraglich vereinbart. Ebenso ist das Deckungskapital zu Vertragsbeginn, ${}_0V_x = -\alpha B_1$, sowie zu Vertragsende, ${}_{\omega-x+1}V_x = 0$, festgelegt. Gehen wir nun von einer konstanten Prämie B aus, so gibt es insgesamt $\omega - x + 1$ Unbekannte: $B,\ {}_1V_x,\ \cdots,\ {}_{\omega-x}V_x$.

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieses linearen Gleichungssystems lässt sich unschwer nachweisen.

Um die Gleichungen geschlossen erfassen zu können, definieren wir die Matrix A durch

$$ A = \begin{pmatrix} 1-\Delta_1-\alpha & -vp_x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\Delta_2 & 1 & -vp_{x+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\Delta_3 & 0 & 1 & -vp_{x+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1-\Delta_{\omega-x-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 & -vp_{\omega-2} & 0 \\ 1-\Delta_{\omega-x} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -vp_{\omega-1} \\ 1-\Delta_{\omega-x+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

den Vektor der gesuchten Variablen $\vec{x}$ als

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} B \\ {}_1V_x \\ {}_2V_x \\ \vdots \\ {}_{\omega-x-2}V_x \\ {}_{\omega-x-1}V_x \\ {}_{\omega-x}V_x \end{pmatrix}$$

sowie den Leistungsvektor $\vec{l}$ durch

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} K_x + T_1 \cdot q_x \cdot v + S_1 \cdot w_x \cdot v + \gamma_1 \\ K_{x+1} + T_2 \cdot q_{x+1} \cdot v + S_2 \cdot w_{x+1} \cdot v + \gamma_2 \\ K_{x+2} + T_3 \cdot q_{x+2} \cdot v + S_3 \cdot w_{x+2} \cdot v + \gamma_3 \\ \vdots \\ K_{\omega-2} + T_{\omega-x-1} \cdot q_{\omega-2} \cdot v + S_{\omega-x-1} \cdot w_{\omega-2} \cdot v + \gamma_{\omega-x-1} \\ K_{\omega-1} + T_{\omega-x} \cdot q_{\omega-1} \cdot v + S_{\omega-x} \cdot w_{\omega-1} \cdot v + \gamma_{\omega-x} \\ K_{\omega} + T_{\omega-x+1} \cdot q_{\omega} \cdot v + S_{\omega-x+1} \cdot w_{\omega} \cdot v + \gamma_{\omega-x+1} \end{pmatrix}$$

Die kompakte Darstellung des linearen Gleichungssystems lautet damit

$$A\vec{x} = \vec{l} \quad .$$

Wir berechnen nun zunächst die Determinante der Matrix A. Jene lässt sich leicht nach der ersten Spalte entwickeln:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} (-1)^{k+1}(1-\Delta_k)\det\left(A_{k1}\right) \quad .$$

Dabei ist A_{k1} diejenige Untermatrix, die aus der Matrix A durch Streichen der ersten Spalte und der k-ten Zeile entsteht. Nun ist

$$\det\left(A_{11}\right) = 1 \quad ,$$

da A_{11} eine rechte obere Dreiecksmatrix ist, deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind. Mit dem gleichen Argument finden wir die Determinante der Matrix A_{21}:

$$\det\left(A_{21}\right) = -vp_x \quad .$$

Die Untermatrix A_{31} hat die Gestalt

$$A_{31} = \begin{pmatrix} -vp_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -vp_{x+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -vp_{x+3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -vp_{x+4} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -vp_{\omega-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -vp_{\omega-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix wird nach der ersten Zeile entwickelt: Streichen wir in A_{31} die erste Zeile und erste Spalte, so entsteht eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Diagonalelemente ist. Somit folgt

$$\det\left(A_{31}\right)=\left(-vp_x\right)\left(-vp_{x+1}\right) \ .$$

In analoger Schlussfolgerung erhalten wir alle noch fehlenden Unterdeterminanten. In geschlossener Form ist daher

$$\det\left(A_{k1}\right)=\prod_{i=0}^{k-2}\left(-vp_{x+i}\right) \ .$$

Insgesamt ist somit die Determinante von A

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{\omega-x+1}\left((-1)^{k+1}(1-\Delta_k)\prod_{i=0}^{k-2}\left(-vp_{x+i}\right)\right)=\sum_{k=1}^{\omega-x+1}\left((1-\Delta_k)\prod_{i=0}^{k-2}vp_{x+i}\right)\neq 0 \ .$$

Das betrachtete lineare Gleichungssystem lässt sich also eindeutig lösen. Da die Matrix A dünn besetzt ist, kann der Lösungsvektor $\vec{x}$ offensichtlich rekursiv berechnet werden, sobald die erste Komponente bekannt ist.

Deshalb berechnen wir zunächst x_1 nach der Cramerschen Regel. Dazu betrachten wir die Matrix A_1, die aus der Matrix A hervorgeht, indem die erste Spalte durch den Lösungsvektor $\vec{l}$ ersetzt wird.

$$A_1=\begin{pmatrix}
l_1 & -vp_x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
l_2 & 1 & -vp_{x+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
l_3 & 0 & 1 & -vp_{x+2} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
l_{\omega-x-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 & -vp_{\omega-2} & 0 \\
l_{\omega-x} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -vp_{\omega-1} \\
l_{\omega-x+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix lässt sich wie oben gezeigt leicht ausrechnen.

$$\det(A_1)=\sum_{k=1}^{\omega-x+1}\left(l_k\prod_{i=0}^{k-2}vp_{x+i}\right) \ .$$

Folglich ist

$$x_1=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{\sum_{k=1}^{\omega-x+1}\left(l_k\prod_{i=0}^{k-2}vp_{x+i}\right)}{\sum_{k=1}^{\omega-x+1}\left((1-\Delta_k)\prod_{i=0}^{k-2}vp_{x+i}\right)} \ .$$

Die übrigen Komponenten des Lösungsvektors $\vec{x}$ lassen sich nun zeilenweise rekursiv berechnen:

$$x_2=\frac{(1-\Delta_1)x_1-l_1}{vp_x} \ ,$$

sowie

$$x_3=\frac{(1-\Delta_2)x_1+x_2-l_2}{vp_{x+1}} \ .$$

Analog ist

$$x_k = \frac{(1-\Delta_{k-1})x_1 + x_{k-1} - l_{k-1}}{vp_{x+k-2}}$$

für $k = 3,\cdots,\omega - x + 1$. Alternativ kann $x_{\omega-x+1}$ aus der letzten Zeile berechnet werden:

$$x_{\omega-x+1} = l_{\omega-x+1} - (1-\Delta_{\omega-x+1})x_1 \quad .$$

Damit sind der Beitrag und das Deckungskapital zu jedem Zeitpunkt berechenbar.

Die versicherungstechnischen Werte lauten

$$B = \frac{\sum_{k=1}^{\omega-x}\left(\left(K_{x+k-1} + T_k \cdot q_{x+k-1} \cdot v + S_k \cdot w_{x+k-1} \cdot v + \gamma_k\right) D_{x+k-1}\right)}{\left(1-\Delta_1-\alpha\right)\cdot D_x + \sum_{k=2}^{\omega-x}\left(1-\Delta_k\right)\cdot D_{x+k-1}} \tag{8}$$

sowie

$$\begin{aligned} {}_1V_x &= \frac{(1-\Delta_1-\alpha)B - K_x - T_1 \cdot q_x \cdot v - S_1 \cdot w_x \cdot v - \gamma_1}{vp_x} \quad , \\ {}_{k-1}V_x &= \frac{(1-\Delta_{k-1})B + {}_{k-2}V_x - K_{x+k-2} - T_{k-1} \cdot q_{x+k-2} \cdot v - S_{k-1} \cdot w_{x+k-2} \cdot v - \gamma_{k-1}}{vp_{x+k-2}} \quad ; k = 3,\cdots,\omega - x + 1 \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Der Nutzen dieses alternativen Berechnungsansatzes liegt darin begründet, dass der dargestellte Algorithmus leicht auf einem Rechner implementiert werden kann. Außerdem ist er hinreichend allgemein und flexibel gestaltet, um die Berechnung der versicherungstechnischen Werte einer Vielzahl privater Krankenversicherungsprodukte zu ermöglichen.

Insbesondere ist es machbar, Produkte mit beliebigen Übertragungswerten durchzurechnen. Doch bevor wir dazu übergehen, wollen wir auf einen Spezialfall des Satzes von Cantelli für die private Krankenversicherung aufmerksam machen.

6 Satz von Cantelli

Die Bereitstellung eines Übertragungswerts lässt sich recht elegant im Kalkül der linearen Gleichungssysteme analysieren. In diesem Zusammenhang sei die am Ende des Versicherungsjahres fällige Garantieleistung bei Tod oder Kündigung jeweils gleich dem Deckungskapital am Ende des Jahres, also

$$T_{t+1} = S_{t+1} = {}_{t+1}V_x \quad .$$

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir, ausgehend von Gleichung (7),

$$(1-\Delta_{t+1})B_{t+1} + {}_tV_x - {}_{t+1}V_x \cdot p_{x+t} \cdot v = K_{x+t} + T_{t+1} \cdot q_{x+t} \cdot v + S_{t+1} \cdot w_{x+t} \cdot v + \gamma_{t+1} \quad ,$$

folgende vereinfachte Rekursionsgleichung für das Deckungskapital:

$$(1-\Delta_{t+1})B_{t+1} + {}_tV_x - {}_{t+1}V_x \cdot p_{x+t} \cdot v = K_{x+t} + {}_{t+1}V_x \cdot q_{x+t} \cdot v + {}_{t+1}V_x \cdot w_{x+t} \cdot v + \gamma_{t+1} \quad .$$

Aufgrund der Beziehung $p_{x+t} = 1 - q_{x+t} - w_{x+t}$ vereinfacht sich das lineare Gleichungssystem zu

$$(1-\Delta_{t+1})B_{t+1} + {}_tV_x - {}_{t+1}V_x \cdot v = K_{x+t} + \gamma_{t+1} \qquad \text{für } t = 0,\cdots\omega - x \quad .$$

Man erkennt, dass dieses Gleichungssystem unabhängig von der Stornowahrscheinlichkeit und der Sterbewahrscheinlichkeit ist. Die Lösungen für den Beitrag und das Deckungskapital ergeben sich aus den Formeln (8) und (9) des vorherigen Abschnitts, wenn man dort für die Ausscheidewahrscheinlichkeiten Null einsetzt.

Falls der Übertragungswert gleich dem Deckungskapital ist, so ist es nicht nötig, Ausscheidewahrscheinlichkeiten zu berücksichtigen. Denn die versicherungstechnischen

Werte, Beitrag und Deckungskapital, sind unabhängig von etwaigen Kündigungs- und Sterbewahrscheinlichkeiten. Diese Aussage stellt einen Spezialfall des Satzes von Cantelli dar.

Umgekehrt müssen in der gängigen Praxis zur Tarifierung in der Privaten Krankenversicherung nur deshalb Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden, da keine Übertragungswerte existieren.

Werden die Übertragungswerte als ein Teil α, mit $\alpha \in (0;1)$, des Bruttodeckungskapitals angesetzt, so ermöglicht das hier dargestellt Kalkül eine vereinfachte Berechnung der versicherungstechnischen Werte. Ausgehend wiederum von Gleichung (7) erhalten wir folgende Rekursionsgleichung für das Deckungskapital:

$$(1-\Delta_{t+1})B_{t+1} + {}_tV_x - {}_{t+1}V_x \cdot p_{x+t} \cdot v = K_{x+t} + {}_{t+1}V_x \cdot \alpha \cdot q_{x+t} \cdot v + {}_{t+1}V_x \cdot \alpha \cdot w_{x+t} \cdot v + \gamma_{t+1} \ ,$$

welche zu

$$(1-\Delta_{t+1})B_{t+1} + {}_tV_x - {}_{t+1}V_x \cdot v \cdot (1-(1-\alpha)\cdot q_{x+t} - (1-\alpha)\cdot w_{x+t}) = K_{x+t} + \gamma_{t+1}$$

äquivalent ist. Man erhält also die versicherungstechnischen Werte aus den Formeln (8) und (9) des vorherigen Abschnitts, indem die Sterbewahrscheinlichkeit und die Stornowahrscheinlichkeit mit dem Faktor $1-\alpha$ multipliziert werden. Ist also beispielsweise ein Übertragungswert in Höhe von 80% der Altersrückstellung vorgesehen, so rechnet man mit 20% der ursprünglichen Storno- beziehungsweise Todesfallwahrscheinlichkeiten. In diesem Zusammenhang kann somit auch das von Reichel [6] formulierte Problem angegangen werden, um die Auswirkung von Stornoabschlägen zu quantifizieren.

7 Fazit

Das Modell von Neuburger wurde erfolgreich von der Lebensversicherung auf die Krankenversicherung übertragen. Damit steht ein leistungsfähiger Algorithmus zur Verfügung, mit dem eine Vielzahl privater Krankenversicherungsprodukte mit beliebigen vertraglich festgelegten Übertragungswerten gerechnet werden kann. Der Vorteil der Methode liegt in der simultanen Berechnung von Beitrag und Altersrückstellungen.

Durch die verallgemeinerte Kontributionsgleichung wurde die Ertragsanalyse in der privaten Krankenversicherung verdeutlicht. Daran ist klar geworden, in wie fern durch die gängige Praxis der Vererbung der Altersrückstellung Unternehmensgewinne oder auch Verluste entstehen. Das Kalkül erlaubt außerdem einen eleganten Beweis des Satzes von Cantelli für die Krankenversicherung.

8 Literatur

[1] *Braun, J.* (1986): Zur Behandlung allgemeiner Lebensversicherungen durch lineare Gleichungssysteme. Blätter der DGVM, Volume 17, Number 3, S.251-267.

[2] *Disch, B.* (2001)*:* Die Berechnung von versicherungstechnischen Werten mit linearen Gleichungssystemen. Blätter der DGVFM, Volume 25, Number 1, S. 29-48.

[3] *Korter, M.* (1993): Lineare Gleichungssysteme und lineare Modelle in der Versicherungsmathematik. Blatter der DGVM, Volume 21, Number 1, S. 27-53.

[4] *Mauermann, W.* (1992): Hinreichende Bedingungen für nichtnegative Lösungen eines linearen Gleichungssystems der Lebensversicherungsmathematik. Blätter der DGVM, Volume 20, Number 4, S. 477-481.

[5] *Neuburger, E.* (1974): Notiz über einen rechnerangepaβten Algorithmus zur Berechnung von Prämien und Reserven. Blätter der DGVM, Volume 11, Number 4, S.641-648.

[6] *Reichel, G.* (1984): Lebensversicherungsmathematik: „Ein weniger ausgefallenes als ausgefahrenes Gebiet?“. Blätter der DGVM, Volume 16, Number 4, S. 401-407.