Übungsblatt 1

Determinante, Abbildungen, Eigenwerte, Eigenvektoren

1. Determinante, Inverse Matrix:

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ und die rechte Seite $\vec{d} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösen Sie das Gleichungssystem mithilfe der inversen Matrix A^{-1}.

2. Spiegelmatrix

Welche Matrix spiegelt im zweidimensionalen Vektorraum mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem an der Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten (diese Spiegelung vertauscht x- und y-Koordinaten).
Welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat diese Matrix (anschaulich und rechnerisch)?

3. Eigenwerte, charakteristisches Polynom

a) Bestimmen Sie zur Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(M - \lambda E)$ und die Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Setzen Sie die Matrix selber an Stelle von λ in das Polynom ein und berechnen sie $p(M)$.

(Hinter das absolute Glied muss man dann sinngemäß die Einheitsmatrix schreiben und das Ergebnis ist sinngemäß die Nullmatrix und nicht die Zahlennull. Zur Kontrolle: $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2;\quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$)

4. Eigenwerte, Eigenvektoren

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie

a) alle Eigenwerte von A und
b) den Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert.

Lösungen – Übungsblatt 1:

1.

$$A\cdot\vec{x}=\vec{d} \quad |\, A^{-1}\cdot \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{d}.$$

(Zur Kontrolle: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$ und $\vec{x}=(14,\ 19,\ -23)$)

2.

Die gesuchte Matrix lautet $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, die Eigenvektoren sind (ganz anschaulich) Vektoren auf dem Spiegel $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda=1$ und Vektoren senkrecht zum Spiegel $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda=-1$.

3.

Lös: $\mathrm{Det}(M-\lambda E) = 2-3\lambda+\lambda^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \{\lambda\to 1,\ \lambda\to 2\}$

$$p(M) = 2E-3M+M^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

4.

a) $\det A=(1-\lambda)(3-\lambda)(6-\lambda)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=1;\ \lambda_2=3;\ \lambda_3=6;$

b) EV1= $\begin{pmatrix}5\\-5\\-1\end{pmatrix}$