

Übungsblatt 3

Anwendung Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$

1. Unbestimmte Integrale: siehe Ü 00
2. Bestimmte Integrale siehe Ü 00
3. Substitutionsregel siehe Ü 00
4. Uneigentliche Integrale (werden wir überspringen - nicht klausurrelevant)

Prüfen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale:

- a. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$
- b. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx, \alpha \in \mathbb{R}$
- c. $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$

5. Anwendung Flächenberechnung

Gesucht ist der Flächeninhalt $A(G)$ des beschränkten Gebietes von G , das von den Kurven mit den Gleichungen $y^2 = x$ und $y = x - 2$ eingeschlossen wird.

Hinweis: Bevor Sie losrechnen, überlegen Sie, ob Sie durch geschickte Wahl der Integrationsvariable den Rechengang vereinfachen können.

6. Anwendung Kurvenlänge

Berechnen Sie die Länge des Parabelbogens $f(x) = x^2$ im Intervall $[-0.5; 1.5]$.

7. Anwendung Rotationsvolumen

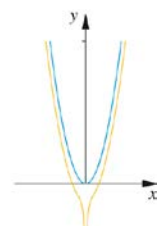
Gegeben sei die Form eines Sektglases, das durch die Rotation der

Parabel $y = \frac{x^2}{a}$ um die y-Achse entsteht:

Bestimmen Sie:

Die Sektmenge bei 200 Gläsern bei einer Füllung bis zur Höhe $\frac{h}{2}$,
mit $h=7\text{cm}$ und $a=0,6\text{ cm}$.

Das Wievielfache mehr an Flaschen benötigen Sie, wenn Sie die Gläser vollständig füllen wollen.



Aus: Arens et al., Mathematik, ISBN: 978-3-8274-2347-4
© Spektrum Akademischer Verlag 2012

Lösungen – Übungsblatt 3:

1.

a) $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - 3,5x^2 + x + C$

b) $F(x) = -\frac{7}{2} \cdot x^{-2} + C$

c) $F(x) = \frac{6}{7} \cdot x^{\frac{7}{6}} + C$

d) $F(x) = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{7}{3}} + x + C$

e) $F(x) = -\frac{1}{2} \cot(x) + C$

f) $F(x) = 3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2}$

g) $F(x) = \frac{\sinh(x)}{e^{\sin x} + 1} \cdot \frac{t^2}{2} + C$

h) $F(x) = \ln x + C$

i) $F(x) = -\frac{4}{3} \cos x + C$

j) $F(x) = -\frac{1}{2} \cos x + C$

2.

a) 5,15

b) π

c) 1,79

d) 49,4

3.

a) $F(x) = \frac{3}{8}(2x-7)^{\frac{4}{3}} + C$

b) $F(x) = -\ln(-x+1) + C$

c) $F(x) = \frac{1}{3 \ln 2} 2^{3x+6} + C$

d) $F(x) = 2 \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}) + C$

e) $F(x) = \arctan(x+1) + C$

f) $F(x) = \tan(4x-5) + C$

g) $F(x) = \frac{3}{8}(x^2-7)^{\frac{4}{3}} + C$

h) $F(x) = -1,5 \ln(-x^2+1) + C$

i) $F(x) = \frac{1}{4}e^{2x^2+3} + C$

j) $F(x) = -\frac{7}{8} \cos^8 x + C$

k) $F(x) = -\frac{1}{8}(1-2 \sin x)^4 + C$

l) $F(x) = \frac{1}{3 \cos^3 x} + C$

m) $F(x) = -\ln(\cos x) + C$

n) $F(x) = \frac{1}{4 \sin^2 x} + C$

o) $F(x) = \frac{1}{9}(2 \ln x + 3)^{\frac{3}{2}} + C$

p) $F(x) = \sin(e^x) + C$

q) $F(x) = -e^{\cos x} + C$

r) $F(x) = \frac{1}{2 \tan(2x)} + C$

s) $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x)} + C$

t) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x)} + C$

u) $F(x) = \frac{1}{3} \arctan(\frac{x-5}{3}) + C$

v) $F(x) = \frac{1}{9} \arctan(\frac{x-1}{3}) + C$

4.

a. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$

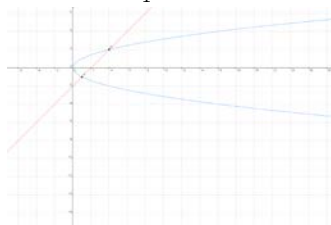
b. $\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{divergent für } \alpha \leq 1 \\ \text{konvergent für } \alpha > 1 \text{ mit } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} \end{cases}$

c. Für $b > 0$ ist $\int_0^b \sin x dx = 1 - \cos b$ und $\cos b$ hat für $b \rightarrow \infty$ keinen Grenzwert, das Integral ist also divergent.

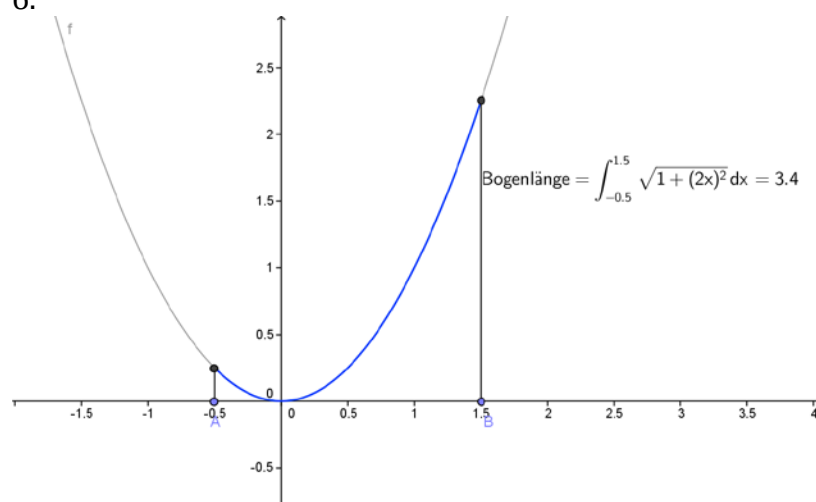
5.

Betrachtet man die Kurven als Funktionen von y , kommt man mit einem Integrationsbereich

aus: $A = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy = 4,5.$



6.



7.

Das Volumen des Sektglases mit einem Deckflächenradius von $r = \sqrt{ah}$ beträgt

$V = \frac{1}{2} \pi a h^2 = \frac{1}{2} \pi r^2 h$. Damit ergibt sich:

- a) ca. 3 Flaschen
- b) genau das Vierfache, also ca. 12 Flaschen.

