Berliner Hochschule für Technik

Übungsblatt 5

Gradient, Extremwertberechnung im IR^n

1. Bestimmen Sie, die Gleichung der Tangentialebene der Funktion

$$f(x, y) = (x^3 + y^3) \cdot e^{-y}$$

im Punkt $(x_0; y_0) = (1;0)$

2. Bestimmen Sie die Funktionalmatrix von $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x^2 \sin(y+z), y \cos x)$

im Punkt $(0;\pi;\pi)$

3. Gegeben sei ein Zylinder mit dem Radius *r=2m* und der Höhe *h=10m.*

Berechnen Sie unter Verwendung totaler Differentiale die Oberflächenänderung und die Volumenänderung, die der Zylinder erfährt, wenn man den Radius um *5 cm* erhöht und die Höhe um *2 cm* erniedrigt.

Vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Werten der Veränderung!

4. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von:

$$f_1(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 17$$

$$f_2(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} - 8x + y - 34$$

$$f_3(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)e^{-y}$$

Lösungen – Übungsblatt 5:

1.

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) = 3x^2 \cdot e^{-y}. \qquad \frac{\delta f}{\delta y}(x, y) = 3y^2 \cdot e^{-y} + (-e^{-y}) \cdot (x^3 + y^3) = e^{-y} \cdot (3y^2 - x^3 - y^3).$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(1, 0) = 3 \cdot e^0 = 3 \text{ und } \frac{\delta f}{\delta y}(1, 0) = e^0 \cdot (-1) = -1.$$

$$\begin{aligned} z &= f(1, 0) + \frac{\delta f}{\delta x}(1, 0) \cdot (x - 1) + \frac{\delta f}{\delta y}(1, 0) \cdot y \\ &= 1 + 3 \cdot (x - 1) - 1 \cdot y \\ &= 1 + 3x - 3 - y \\ &= 3x - y - 2. \end{aligned}$$

2.

$$\frac{\delta f_1}{\delta x}(x, y, z) = 2x \sin(y + z). \quad , \quad \frac{\delta f_2}{\delta x}(x, y, z) = -y \sin x.$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta y}(x, y, z) = x^2 \cos(y + z). \quad , \quad \frac{\delta f_2}{\delta y}(x, y, z) = \cos x.$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta z}(x, y, z) = x^2 \cos(y + z). \quad , \quad \frac{\delta f_2}{\delta z}(x, y, z) = 0.$$

damit ergibt sich:

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \sin(y + z) & x^2 \cos(y + z) & x^2 \cos(y + z) \\ -y \sin x & \cos x & 0 \end{pmatrix}.$$

und den Punkt eingesetzt:

$$Df(0, \pi, \pi) = \begin{pmatrix} 0 \cdot \sin(2\pi) & 0^2 \cdot \cos(2\pi) & 0^2 \cdot \cos(2\pi) \\ -\pi \sin 0 & \cos 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lsg.

3.

Mit *dr=0.05* und *dh=-0.02* und $df = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)dx + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)dy$, sowie den Formeln

für die Oberfläche des Zylinders: $F(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

bzw. des Volumens: $V(r, h) = \pi r^2 h$

ergibt sich für die Oberfläche:

$\frac{\delta F}{\delta r}(r, h) = 4\pi r + 2\pi h$ und $\frac{\delta F}{\delta h}(r, h) = 2\pi r,$, $\frac{\delta F}{\delta r}(2, 10) = 8\pi + 20\pi = 28\pi$ und $\frac{\delta F}{\delta h}(2, 10) = 4\pi.$

$$\begin{aligned}
dF &= \frac{\delta F}{\delta r}dr + \frac{\delta F}{\delta h}dh \\
&= 28\pi \cdot dr + 4\pi \cdot dh \\
&= 28\pi \cdot 0.05 + 4\pi \cdot (-0.02) \\
&= 1.4\pi - 0.08\pi \\
&= 1.32\pi \approx 4.147.
\end{aligned}$$

$F(2, 10) = 2\pi \cdot 4 + 2\pi \cdot 2 \cdot 10 = 8\pi + 40\pi = 48\pi,$

$F(2.05, 9.98) = 2\pi \cdot 4.2025 + 2\pi \cdot 2.05 \cdot 9.98 = 8.405\pi + 40.918\pi = 49.323\pi$

$\Delta F = 49.323\pi - 48\pi = 1.323\pi \approx 4.156.$

und analog dann für das Volumen:

$\Delta V = 41.94095\pi - 40\pi = 1.94095\pi \approx 6.098.$

Lsg.

4. Zuerst für f_1:

$$\frac{\delta f_1}{\delta x}(x, y) = 2x - y + 9 \text{ und } \frac{\delta f_1}{\delta y}(x, y) = -x + 2y - 6.$$

$$\operatorname{grad} f_1(x, y) = \left(\frac{\delta f_1}{\delta x}(x, y), \frac{\delta f_1}{\delta y}(x, y)\right) = (2x - y + 9, -x + 2y - 6).$$

, also

$$(2x - y + 9, -x + 2y - 6) = (0, 0), \text{ also } 2x - y + 9 = 0 \text{ und } -x + 2y - 6 = 0.$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & -9 \\ -x & + & 2y & = & 6. \end{array}$$

ergibt als Kandidaten den Punkt $P_0(-4; 1)$.

Die Berechnung der Hessematrix ergibt dann

$$H_{f_1}(-4, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

und deren Determinante:

$$\det H_{f_1}(-4, 1) = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3 > 0.$$

somit liegt im Punkt P_0 ein lokales Minimum von $f_1$vor.

Analoges Vorgehen für f_2 liefert:

$$H_{f_2}(2, 4) = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{\sqrt{4}} \\ -\frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{2}{2} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

,

$$\det H_{f_2}(2, 4) = 6 \cdot \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0.$$

die Hessematrix ist also positiv definit und in $P_0=(2; 4)$ liegt für f_2 ein lokales Minimum vor.

Analoges Vorgehen für f_3 liefert nunmehr allerdings zwei Punkte $P_0=(0; 0)$ *und* $P_1=(0; 2)$., und somit:

$$H_{f_3}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \det H_{f_3}(0, 0) = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0.$$

$$H_{f_3}(0, 2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \cdot e^{-2} \end{pmatrix}. \quad \det H_{f_3}(0, 2) = 2 \cdot e^{-2} \cdot (-2 \cdot e^{-2}) - 0 = -4 \cdot e^{-4} < 0.$$

,

also liegt in $P_0=(0; 0)$ ein lokales Minimum und in $P_1=(0; 2)$ ein Sattelpunkt.