Übungsblatt 8

Mehrfach-Integrale

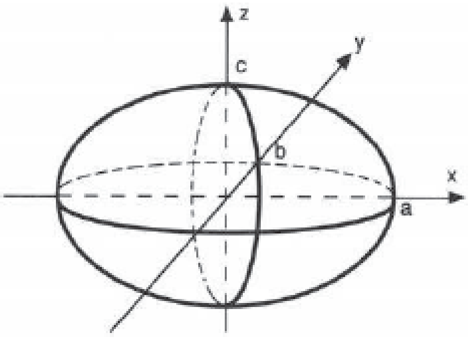


Fig. 7.8: Ellipsoid

1. Berechnen Sie das Volumen folgenden Körpers

(*Volumen eines Ellipsoides*) Ein Ellipsoid, wie in Fig. 7.8 skizziert, besteht aus allen Punkten

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

wobei die positiven Zahlen a, b, c die Hauptachsenlängen des Ellipsoides sind.

Quelle: [Burg/Haf/Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd 1]

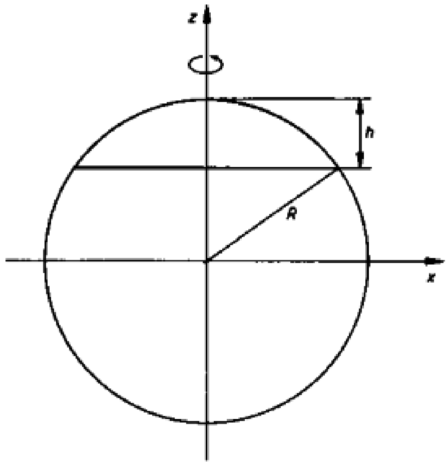
2. Es sei U der Einheitskreis um den Nullpunkt. Bestimmen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten.:

$$\iint_U e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

Quelle: [Riessinger - Mathematik für Ingenieure, Übungsaufgaben]

3. Berechnen Sie für die im Bild skizzierte homogene **Kugelhaube(Kugelabschnitt)** Volumen und Schwerpunkt. (R: Radius der Kugel, h: Höhe der Kugelhaube)

Quelle: [Papula, Mathematik für Ingenieure, Bd 2]



Lösungen – Übungsblatt 8:

1.

Wir berechnen das Volumen eines halben Ellipsoides, und zwar das Volumen der »oberen Hälfte« (d.h. $z \geq 0$). Der »obere Deckel« des Ellipsoides — d.h. der Teil des Ellipsoidrandes mit $z \geq 0$ — wird durch $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ mit $z \geq 0$ beschrieben, also aufgelöst nach z durch

$$z = f(x, y) := c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad \text{wobei} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \tag{7.7}$$

gelten muß. Diese Ungleichung beschreibt eine Ellipse, und zwar die Schnittfläche zwischen dem Ellipsoid und der x-y-Ebene. Die Ellipse ist der Definitionsbereich B unserer Funktion f in (7.7). Damit ist das halbe Ellipsoidvolumen gleich

$$V = \iint_B c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{7.8}$$

Die Ellipse B läßt sich offenbar einschließen von den Graphen der beiden Funktionen

$$h(x) := b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \qquad g(x) = -h(x)\,, \quad \text{für } x \in [-a, a].$$

Nach (7.5) erhalten wir damit

$$V = \int_{-a}^{a} \left(\int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Zur Lösung des inneren Integrals faßt man $p := \sqrt{1-(x/a)^2}$ als Konstante auf und bringt $\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}$ durch die Substitution $y = bp \cdot t$ auf die

Gestalt $p\sqrt{1-t^2}$. Die Anwendung der Substitutionsregel und Verwendung von $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$ (Inhalt des Einheitskreises, Abschn. 4.2.2) ergibt

$$V = \frac{cb\pi}{2}\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}abc\pi\,.$$

Das Volumen des Ellipsoides ist das Doppelte hiervon, also

$$\text{Volumen des Ellipsoides: } \frac{4}{3}abc\pi\,. \tag{7.9}$$

Speziell für $a = b = c =: r$ erhält man das

$$\text{Kugelvolumen: } \frac{4}{3}r^3\pi\,. \tag{7.10}$$

2.

$$\iint_U e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{U}} e^{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint_{\widetilde{U}} e^{r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi,$$

$$\begin{aligned}\iint_{\widetilde{U}} e^{r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^{r^2}\cdot r\,dr\right)d\varphi\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\,d\varphi\\ &= \left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\\ &= \left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\pi\\ &= \pi\cdot(e-1).\end{aligned}$$

3.

Der Kreis $x^2+z^2=R^2$ geht für $x\to r$ in die *Kugel* $r^2+z^2=R^2$, d.h. $z=\pm\sqrt{R^2-r^2}$ über. *Obere* Begrenzungsfläche ist $z=\sqrt{R^2-r^2}$, *untere* Begrenzungsfläche die zur x,y-Ebene parallele *Ebene* $z=R-h$. Die Projektion der Kugelhaube in die x,y-Ebene ergibt einen *Kreis* vom Radius R_0, $R_0^2+(R-h)^2=R^2$, d.h. $R_0=\sqrt{2Rh-h^2}$.

$$V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2Rh-h^2}}\int_{z=R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi=\frac{\pi}{3}h^2(3R-h)$$

Schwerpunkt $S=(0;0;z_S)$ mit:

$$z_S=\frac{3}{\pi h^2(3R-h)}\cdot\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2Rh-h^2}}\int_{z=R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\varphi=\frac{3(2R-h)^2}{4(3R-h)}$$