Übungsblatt 5
Interpolation

1. Gegeben seien die Stützstellen (x_i, y_i): *(0, 1), (1, 3) und (3, 2)*. Werten Sie mit dem **Neville-Aitken-Verfahren** die Zwischenstelle $x_z=2$ aus.

2. Newton-Interpolation:

a. Berechnen Sie mit denselben Stützstellen wie in Aufgabe 1: *(0, 1), (1,3) und (3,2)* nach dem Newton-Verfahren das Interpolationspolynom und bestimmen sie dann direkt den Wert $P_2(x_z=2)$.

b. Berechnen Sie mit den Stützstellen: (-1, 11), (0, -2), (1, 3) und (2, 22) nach dem Newton-Verfahren das Interpolationspolynom P_3

3. Lagrange-Interpolation

Gegeben seien die Stützstellen (x_i, y_i): *(0, 0), (1,-1) und (3, 3)*. Berechnen Sie mit den Stützstellen die zugehörigen Lagrange-Polynome L_0, L_1 *und* L_2:

4. Spline-Interpolation

Gegeben seien die Stützstellen (x_i, y_i): *(0, 0), (1, 1) und (2, 0).*

Zusätzlich seien die Werte der Ableitungen bekannt: $s_0=3/2$, $s_1=0$ *und* $s_2=-3/2$.

Berechnen Sie mit den Stützstellen und den Ableitungswerten das kubische Spline-Polynom jeweils in den Intervallen *[0, 1] und [1, 2.]*

Lösungen – Übungsblatt 5:

Aufgabe 1 – Neville-Aitken-Verfahren:

Gegeben seien die Stützstellen (x_i, y_i): (0, 1), (1, 3) und (3, 2). Werten Sie mit dem Neville-Aitken-Verfahren die Zwischenstelle $x_z=2$ aus:

x	*y*		
0	$1 = P_0(2)$	$P_{0,1}(2) = 5$	$P_{0,1,2}(2) = 10/3$
1	$3 = P_1(2)$	$P_{1,2}(2) = 5/2$	
3	$2 = P_2(2)$		

Aufgabe 2 – Newton Interpolation:

a. Berechnen Sie mit denselben Stützstellen wie in Aufgabe 1: (0, 1), (1,3) und (3,2) nach dem Newton-Verfahren das Interpolationspolynom und bestimmen sie dann direkt den Wert $P(x_z=2)$.

$$P_2(x) = P_{0,1,2}(x) = 1 + 2(x-0) - \frac{5}{6}(x-0)(x-1) = \frac{1}{6}\left[6 + 17x - 5x^2\right]$$

$$P_2(2) = \frac{10}{3}$$

b. Berechnen Sie mit den Stützstellen: (-1, 11), (0, -2), (1, 3) und (2, 22) nach dem Newton-Verfahren das Interpolationspolynom P_3

$$P_2(x) = P_{0,1,2,3}(x) = -11 + 9(x+1) - 2(x+1)(x) + 3(x+1)(x)(x-1) = \left[-2 + 4x - 2x^2 + 3x^3\right]$$

Aufgabe 3 – Lagrange Interpolation:

Gegeben seien die Stützstellen (x_i, y_i): (0, 0), (1, -1) und (3, 3). Berechnen Sie mit den Stützstellen die zugehörigen Lagrange-Polynome L_0, L_1 und L_2 und das sich ergebende Interpolationspolynom P_2

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{3} = \frac{1}{3}\left(x^2 - 4x + 3\right)$$

$$L_1(x) = \frac{(x)(x-3)}{-2} = \frac{-1}{2}\left(x^2 - 3x\right)$$

$$L_2(x) = \frac{(x)(x-1)}{6} = \frac{1}{6}\left(x^2 - x\right)$$

$$P_2(x) = 0 \cdot L_0(x) - 1 \cdot L_1(x) + 3 \cdot L_2(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

Aufgabe 4 – Spline Interpolation:

Gegeben seien die Stützstellen (x_i, y_i): (0, 0), (1, 1) und (2, 0). Zusätzlich seien die Werte der Ableitungen bekannt: $s_0=3/2$, $s_1=0$ und $s_2=-3/2$. Berechnen Sie mit den Stützstellen und den Ableitungswerten das kubische Spline-Polynom in den Intervallen [0, 1] und [1, 2].

$$S_{[0,1]}(x) = 0 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2(x-1) = \frac{x}{2}\left[3 - x^2\right]$$

$$S_{[1,2]}(x) = 1 + 0(x-1) - (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2(x-2) = \frac{1}{2}\left[x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right]$$