Übungsblatt 2
Lineare Algebra - Teil I

1. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten so, dass die Vektoren kollinear sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sind die Punkte $P = (1 / -2 / 3)$ und $Q = (-4 / 5 / -6)$

a. Berechnen Sie den Verbindungsvektor von P nach Q.

b. Die Strecke von *P* nach *Q* soll in 3 gleiche Teile zerteilt werden.
Wie lauten die Koordinaten der Zwischenpunkte Z_1 und Z_2?

3. Prüfen Sie, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind:

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

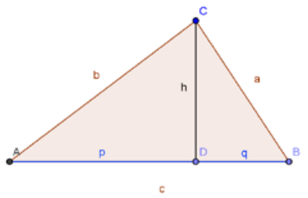
b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. a) Zeigen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes
den Satz des Pythagoras $a^2+b^2=c^2$

b) den Kathetensatz $a^2=q\,c$ und $b^2=p\,c$

c) den Höhensatz $h^2=p\,q$

d) den Cosinussatz $c^2=a^2+b^2-2\,a\,b\cos(a,b)$.



5. Zerlegen Sie $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die Summe zweier Vektoren parallel bzw. senkrecht zu $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Gegeben ist die Parameterdarstellung einer Ebene E:

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (u, v € ℝ, in der Einheit m).

Eine Masse wird auf der Ebene *E* durch die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10N \\ 20N \\ 3N \end{pmatrix}$ geradlinig von $P_1(u=0;\ v=-1)$

nach $P_2(u=1;\ v=2)$ verschoben.
Berechnen Sie die dabei verrichtete Arbeit W
und den resultierenden Kraftvektor $\vec{F}_s$ in Wegrichtung.

7. Stellen Sie die Gerade *G* $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

als Schnittgerade zweier Ebenen E_1, E_2 dar, also als Lösungsmenge zweier linearer Gleichungen.
Wie lauten die Gleichungen aller durch *G* legbaren Ebenen?

8. Gegeben sind die Gerade *g*: $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und der Punkt *P*: $\vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Hesse´sche Normalform derjenigen Ebene *E* durch *P*, welche zu *g* normal ist.

Lösungen – Übungsblatt 2:

1. $a = \lambda b;\ b_1 = 6;\ b_3 = 15;\ \lambda = 3;$

2. a) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$ b) $\vec{Z_1} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{Z_2} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 8/3 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. a) linear unabhängig, b) linear abhängig (1; -1; 1)

4. im Tutorium

5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6. W = 43Nm $\vec{F_s} = \frac{43}{14}\begin{pmatrix} -2N \\ 3N \\ 1N \end{pmatrix}$

7.

Jeder zum Richtungsvektor von G orthogonale Vektor ist Normalvektor einer derartigen Ebene. Das zugehörige Absolutglied in der Ebenengleichung folgt aus der Bedingung, dass der gegebene Punkt von G auch die Ebenengleichung erfüllen muss.

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x_2 + 2x_3 - 8 = 0 \\ E_2: &\quad -x_1 + 2x_3 - 5 = 0 \end{aligned}$$

Jede weitere Ebenengleichung ist eine Linearkombination dieser beiden.

8. $E(x): 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0$