Übungsblatt 5
Differentialrechnung

Stetigkeitsnachweis:

1. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit an der Stelle $x = -1$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1}; & x \neq -1 \\ \dfrac{-1}{2}; & x = -1 \end{cases}$

Differentialrechnung:

2. Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ f(x) = \sqrt{x}$
und geben Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $x_0 = 4$ an.

Differenzieren Sie mit Hilfe der Differentiationsregeln:

3. $f(x) = e^x(-6 + 6x - 3x^2 + x^3)$

4. $f(x) = \sin 2x$. Berechnen Sie die Ableitung auf zwei Wegen:

a) Formen Sie dazu *f(x)* mit Hilfe der Additionstheoreme um und benutzen Sie dann die Produktregel. Vereinfachen Sie dann das Ergebnis wieder mit Hilfe der Additionstheoreme.

b) Benutzen Sie die Kettenregel.

5. $f(x) = e^{-2x+3}$. Berechnen Sie die Ableitung auf zwei Wegen:

a) Führen Sie die Funktion auf die elementare e–Funktion e^x zurück und benutzen Sie dann die Regeln ohne Kettenregel. Vereinfachen Sie das Ergebnis.

b) Benutzen Sie die Kettenregel.

6. Berechnen Sie die Ableitung von:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

b) $f(x) = \cos(\sin^2(\cos x))$

c) $f(x) = x^{\cos x}$

7. Finden Sie zu der folgenden Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \sinh(2x) - \cosh(2x)$
eine Formel für die n-te Ableitung.

8. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktion $f(x) = \tan^2(x);\ \ g(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ identische Ableitungen besitzen.

Lösungen – Übungsblatt 5:

1. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2} = f(-1)$: *f ist stetig in x = -1*

2. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y = \frac{1}{4}x + 1$

3. $f'(x) = x^3 e^x$

4. $f'(x) = 2 \cdot \cos 2x$

5. $f'(x) = -2 \cdot e^{-2x+3}$

6. a) $f'(x) = \frac{a^2}{(\sqrt{x^2+a^2})^3}$

b) $f'(x) = \sin(\sin^2 \cos x)) \cdot 2\sin(\cos x) \cdot \cos(\cos x) \cdot \sin x$

c) $f'(x) = [-x \sin x \ln x + \cos x]\, x^{(\cos x - 1)}$

7.

$$f'(x) = 2\cosh(2x) - 2\sinh(2x)$$
$$f''(x) = 4\sinh(2x) - 4\cosh(2x) = -4\cosh(2x) + 4\sinh(2x)$$
$$f'''(x) = 8\cosh(2x) - 8\sinh(2x)$$
$$\Longrightarrow \quad f^n(x) = -(-2)^n \cosh(2x) + (-2)^n \sinh(2x)$$

8.

$$f(x) = \tan^2 x \implies f'(x) = \left(\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\right)' = 2\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \implies g'(x) = \left(\cos^{-2} x\right)' = -2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\implies f'(x) = g'(x)$$