

Operationen div und mod für Ganzzahlen

1. Eine Divisionsoperation für rationale Zahlen

Für *rationale Zahlen* gibt es nur **eine** Divisionsoperation. Um sie von anderen Divisionsoperationen zu unterscheiden, bezeichnen wir sie hier mit dem Namen `divr` (statt wie üblich mit dem Operator `/`). Anstelle eines Dezimal-Kommas (wie im Deutschen üblich) verwenden wir hier einen Dezimal-Punkt (wie im Englischen üblich und in Java-Programmen vorgeschrieben).

Für die Operation `divr` gilt z.B.

`8.0 divr 4.0` ist gleich `2.0`

`7.0 divr 2.0` ist gleich `3.5`

`7.5 divr 2.0` ist gleich `3.75`

`1.0 divr 3.0` ist gleich `0.333...` (sprich: null Punkt drei Periode)

2. Mehrere Divisionsoperationen für ganze Zahlen

Als *Ganzzahl-Divisionsoperation* bezeichnen wir eine Divisionsoperation, die man nur auf Ganzzahlen anwenden darf und die immer *eine Ganzzahl als Ergebnis liefert*. Anders als bei rationalen Zahlen gibt es aber nicht nur *eine* solche Divisionsoperation, sondern *mehrere* verschiedene. Solche Ganzzahl-Divisionsoperationen spielen in der Informatik eine wichtige Rolle. Sie sind als Maschinenbefehle in alle gängigen Computer (und in einige wenige Taschenrechner) eingebaut.

Seien g_1 und g_2 zwei Ganzzahlen. Wenn der rationale Quotient `g1 divr g2` eine Ganzzahl g_3 ist, dann muss auch für jede Ganzzahl-Divisionsoperation `divg` gelten: `g1 divg g2` ist gleich g_3 .

Beispiel-01: Für jede Ganzzahl-Divisionsoperation `divg` muss gelten `12 divg 3` ist gleich 4.

Von einem *Zweifelsfall* sprechen wir hier, wenn der rationale Quotient `r3` gleich `g1 divr g2` *keine* Ganzzahl ist. In einem Zweifelsfall kann und muss eine Ganzzahl-Divisionsoperation entweder die nächste Ganzzahl unterhalb oder die nächste Ganzzahl oberhalb von `r3` als Ergebnis liefern.

Beispiel-02: Ein Zweifelsfall bei der Definition einer Ganzzahl-Divisionsoperation `divg`

Weil das rationale Ergebnis von `7 divr 2` zwischen 3 und 4 liegt, können wir als Ganzzahl-Ergebnis von `7 divg 2` entweder 3 oder 4 festlegen.

Da es unendlich viele solche Zweifelsfälle gibt, kann man theoretisch *unendlich viele* verschiedene Ganzzahl-Divisionsoperationen definieren. Praktisch wichtig sind aber vor allem *vier* solche Operationen, die wir hier mit den Namen `divRR`, `divLL`, `divRL` und `divLR` bezeichnen.

Anmerkung: Leider gibt es keine verbreiteten Standardnamen für diese Operationen, obwohl ihre Unterscheidung beim Programmieren manchmal wichtig ist.

In den vier Namen `divRR`, `divLL`, `divRL` und `divLR` soll der Buchstabe R bedeuten, dass in Zweifelsfällen die nächste weiter rechts liegende (die nächste größere) Ganzzahl geliefert wird.

Der Buchstabe L bedeutet entsprechend, dass in Zweifelsfällen die nächste weiter links liegende (die nächste kleinere) Ganzzahl geliefert wird.

In den vier Namen `divRR`, `divLL`, `divRL`, `divLR` betrifft der *erste* Großbuchstabe die Fälle, in denen das rationale Divisionsergebnis *negativ* ist. Der *zweite* Großbuchstabe betrifft die Fälle, in denen das rationale Divisionsergebnis *positiv* ist.

Mit anderen Worten und Zeichen:

`divRR` rundet immer nach rechts $\rightarrow 0 \rightarrow$

`divLL` rundet immer nach links $\leftarrow 0 \leftarrow$

`divRL` rundet hin zur 0 $\rightarrow 0 \leftarrow$

`divLR` rundet weg von der 0 $\leftarrow 0 \rightarrow$

Beispiel-03: Ein paar Ergebnisse der 4 Ganzzahl-Divisionsoperationen

a	b	a divr b	a divRR b	a divLL b	a divRL b	a divLR b
+10	+4	+2.5	+3	+2	+2	+3
-10	-4	+2.5	+3	+2	+2	+3
-10	+4	-2.5	-2	-3	-2	-3
+10	-4	-2.5	-2	-3	-2	-3

Aufgabe-01: Füllen Sie die leeren Felder der folgenden Tabelle aus:

a	b	a divr b	a divRR b	a divLL b	a divRL b	a divLR b
+17	+4					
-17	-4					
-17	+4					
+17	-4					

3. Was versteht man unter dem Rest einer Ganzzahl-Division?

Wenn man mit rationalen Zahlen rechnet, ist die Operation *Multiplikation* (mult) die exakte Umkehrung der Operation *Division* (divr), denn für beliebige rationale Zahlen a und b gilt:

$(a \text{ divr } b) \text{ mult } b$ ist gleich a

Beispiel-04: $(10.0 \text{ divr } 4.0) \text{ mult } 4.0$ ist gleich 10.0

Wenn man mit Ganzzahlen und einer Ganzzahl-Divisionsoperation rechnet, ist die Sache nicht ganz so einfach.

Beispiel-05: $(10 \text{ divLL } 4) \text{ mult } 4$ ist gleich 8 (denn $10 \text{ divLL } 4$ ist gleich 2, siehe oben).

Diese Rechnung beginnt mit 10, endet aber nicht mit 10, sondern bloß mit 8.

Die Differenz $10 - 8$ gleich 2 bezeichnet man als *den Rest* der Division $10 \text{ divLL } 4$.

Als Formel kann man das auch so schreiben:

Rest-von[$10 \text{ divLL } 4$] ist gleich $10 - (10 \text{ divLL } 4) \text{ mult } 4$ ist gleich 2

Diese (unübliche und ziemlich umständliche) Notation soll deutlich machen:

Der Rest einer Division hängt (nicht nur von den bearbeiteten Zahlen, sondern) auch davon ab, welche Ganzzahl-Divisionsoperation man verwendet.

Beispiel-06: Der Rest hängt von der Divisionsoperation ab:

Rest-von[$10 \text{ divLL } 4$] ist gleich $10 - (10 \text{ divLL } 4) \text{ mult } 4$ ist gleich 2

Rest-von[$10 \text{ divRR } 4$] ist gleich $10 - (10 \text{ divRR } 4) \text{ mult } 4$ ist gleich -2

Rest-von[$10 \text{ divRL } -4$] ist gleich $10 - (10 \text{ divRL } -4) \text{ mult } -4$ ist gleich 2

Rest-von[$10 \text{ divLR } -4$] ist gleich $10 - (10 \text{ divLR } -4) \text{ mult } -4$ ist gleich -2

Zu jeder Ganzzahl-Divisionsoperation gibt es also eine zugehörige *Rest-Operation* (die auch als *Modulo-Operation* oder kurz mit mod bezeichnet wird). Die Restoperationen, die zu den Divisionsoperationen divRR, divLL, divRL, divLR gehören, bezeichnen wir hier (natürlich?) mit modRR, modLL, modRL und modLR. Diese Rest-Operationen sind wie folgt definiert:

$\text{modRR}(a, b) = a - (a \text{ divRR } b) \text{ mult } b$

$\text{modLL}(a, b) = a - (a \text{ divLL } b) \text{ mult } b$

$\text{modRL}(a, b) = a - (a \text{ divRL } b) \text{ mult } b$

$\text{modLR}(a, b) = a - (a \text{ divLR } b) \text{ mult } b$

Beispiel-07: Ein paar Ergebnisse von Divisions- und von Rest-Operationen

a	b	a divr b	a divRR b	a modRR b = a - (a divRR b) mult b
+10	+4	+2.5	+3	+10 - (+3 mult +4) = -2
-10	-4	+2.5	+3	-10 - (+3 mult -4) = +2
-10	+4	-2.5	-2	-10 - (-2 mult +4) = -2
+10	-4	-2.5	-2	+10 - (-2 mult -4) = +2

a	b	a divr b	a divLL b	a modLL b = a - (a divLL b) mult b
+10	+4	+2.5	+2	+10 - (+2 mult +4) = +2
-10	-4	+2.5	+2	-10 - (+2 mult -4) = -2
-10	+4	-2.5	-3	-10 - (-3 mult +4) = +2
+10	-4	-2.5	-3	+10 - (-3 mult -4) = -2

a	b	a divr b	a divRL b	a modRL b = a - (a divRL b) mult b
+10	+4	+2.5	+2	+10 - (+2 mult +4) = +2
-10	-4	+2.5	+2	-10 - (+2 mult -4) = -2
-10	+4	-2.5	-2	-10 - (-2 mult +4) = -2
+10	-4	-2.5	-2	+10 - (-2 mult -4) = +2

a	b	a divr b	a divLR b	a modLR b = a - (a divLR b) mult b
+10	+4	+2.5	+3	+10 - (+3 mult +4) = -2
-10	-4	+2.5	+3	-10 - (+3 mult -4) = +2
-10	+4	-2.5	-3	-10 - (-3 mult +4) = +2
+10	-4	-2.5	-3	+10 - (-3 mult -4) = -2

Aufgabe-02: Füllen Sie die leeren Felder der folgenden Tabelle aus:

a	b	a modRR b = a-(a divRR b)*b	a modLL b = a-(a divLL b)*b	a modRL b = a-(a divRL b)*b	a modLR b = a-(a divLR b)*b
+17	+4				
-17	-4				
-17	+4				
+17	-4				

Aufgabe-03: Angenommen, Sie sind der Präsident eines Kaninchenzüchter-Vereins. Der Verein hat 5 Mitglieder und ist zur Zeit (bei einem anderen Verein) mit 17 Kaninchen verschuldet (anders ausgedrückt: Ihr Verein besitzt zur Zeit -17 Kaninchen). Sie sollen die Rückzahlung der Vereinsschuld (aus den privaten Beständen der einzelnen Mitglieder) organisieren. Dazu versuchen Sie, die Schuld von -17 Kaninchen möglichst gerecht auf die 5 Mitglieder zu verteilen, indem Sie den Quotienten $-17 \text{ div } 5$ berechnen. Aber welche Divisionsoperation sollen Sie anstelle von `div` verwenden? Die Operation `divr` für rationale Zahlen ist prinzipiell ausgeschlossen (Tiere dezimal zu zerstückeln kommt für einen Kaninchenzüchter nicht in Frage). Aber welche Ganzzahl-Divisionsoperation sollten Sie verwenden? Begründen Sie Ihre Wahl.

4. Und was hat das mit Java zu tun?

In Java sind die beiden Ganzzahl-Operationen `divRL` ("rundet hin zur 0") und `modRL` vordefiniert, allerdings unter den kürzeren Namen `/` und `%`. Wenn man andere Ganzzahl-Operationen benötigt (z.B. `divRR` oder `modLL` etc.), muss man sie selbst programmieren.

Aufgabe-04 (für fortgeschrittene Java-Programmierer): Schreiben Sie die oben beschriebenen 4 Ganzzahl-Divisionsoperationen und die 4 zugehörigen Rest-Operationen als Java-Methoden.