

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Explizite Finite Elemente Methode

Numerische Simulation
FEM versus PFC und CFD

LV02: Masterkurs für MK-M, ME-M und PE-M

Prof. Dr.-Ing. Hans-Dieter Kleinschrodt
FB VIII: Maschinenbau, Veranstaltungstechnik, Verfahrenstechnik

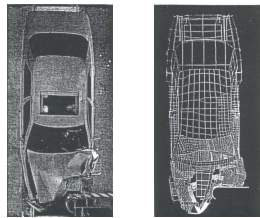
Numerische Simulationsmethoden

- FEM Finite Elemente Methode
- PFC Partical Flow Code
- CFD Computational Fluid Dynamics

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM

Ziel

Wirklichkeit: technisches Problem (Versuch)



Simulation: wirklichkeitsgetreu nachahmen
virtuell mit numerischen Methoden

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM

Beispiele

- Risschadensanalyse im Rohrboden eines Wärmetauschers (FEM)
- Ursachenanalyse für Entmischungen in einem Schacht (PFC)
- Ausgasung einer Flüssigkeit in einem elektrochemischen Reaktor (CFD)

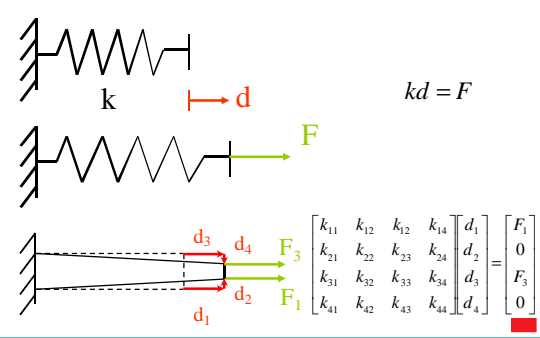
Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM

Ziele der Simulation

- **Verständnis des Vorgangs**
(Nachbildung der Natur)
- **Optimierung des Vorgangs**
- **Vorhersage des Vorgangs**

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM

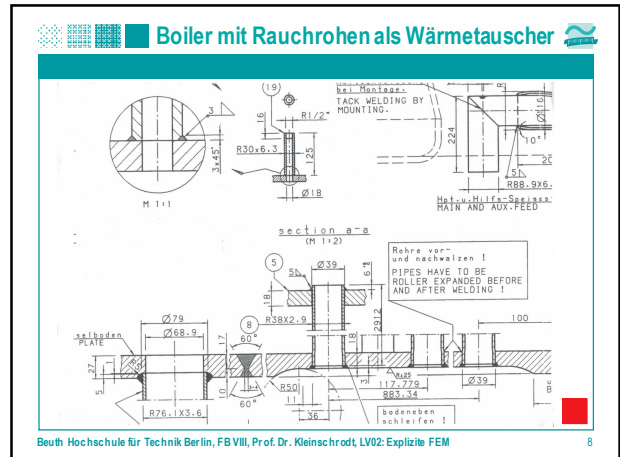
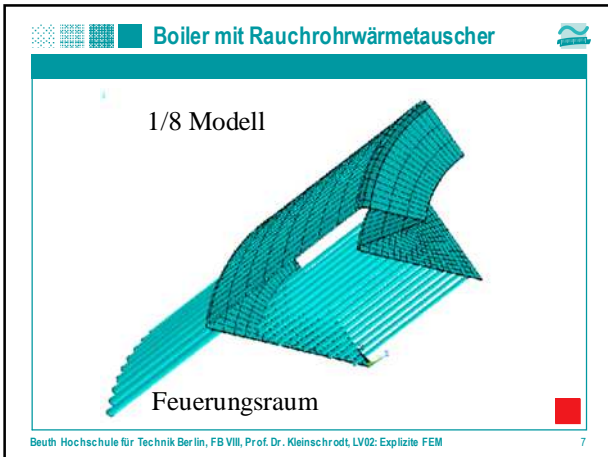
FEM: Finite Elemente Methode



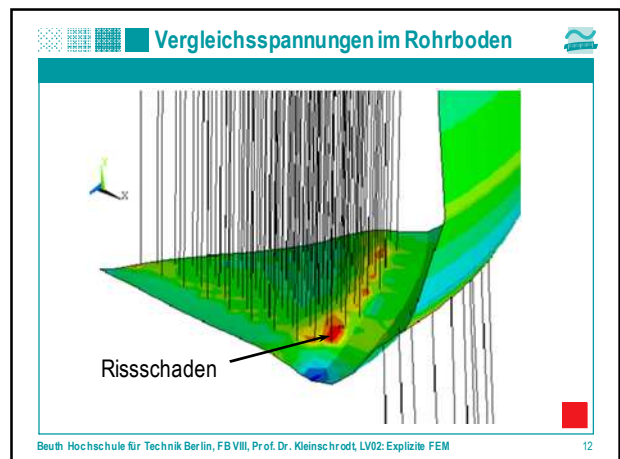
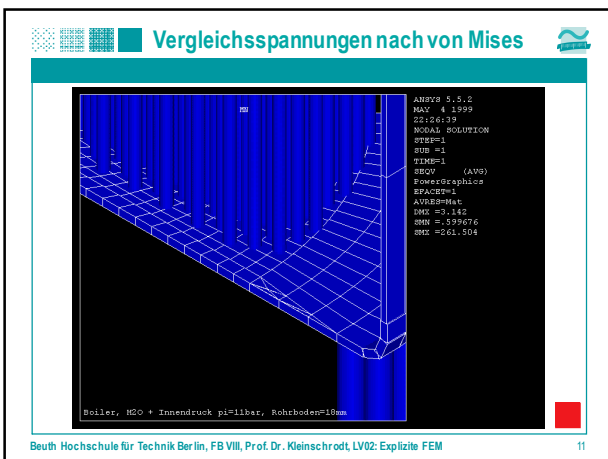
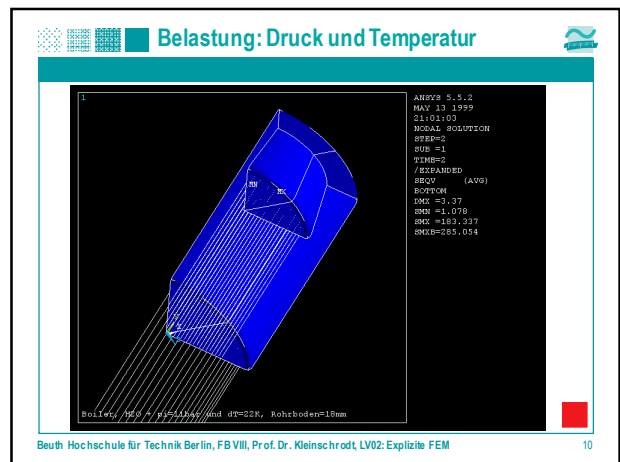
$$kd = F$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM



- ### Modellannahmen
- linear elastisches Materialverhalten
 - kleine Verschiebungen
 - Schalen- und Balkenelemente
 - 2000 Knoten mit je 6 Freiheitsgraden (DOF)
 - 3 Verschiebungen und 3 Drehungen
 - Lineares Gleichungssystem mit 12 000 DOF
 - Belastung: Innendruck + Temperaturdifferenz
- Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM



PFC: Partical Flow Code

m Masse
 J_S Massenträgheitsmoment

Kontakt **glatt** oder **rau**
 (Gewichtskraft vernachlässigt)

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 13

Experiment - Simulation

- Experiment
 - Ball fällt zwischen 2 schiefen Ebenen runter! ... oder nicht?
- Simulation
 - FEM mit glattem Kontakt
 - FEM mit rauem Kontakt
 - PFC mit 1 oder 2 Bällen

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 14

Klassisch (analytisch)

Impulsatz: $\sum \vec{F}_i = m \dot{\vec{v}}$ (I. Newton)
 Drallsatz (eben): $\sum M_i^S = J_S \dot{\omega}$ (L. Euler)

Zeitintegration: $\int_{t_a}^{t_e} [\vec{F}_n(t) + \vec{F}_s(t)] dt = m \vec{v}_e - m \vec{v}_a$
 $\int_{t_a}^{t_e} F_s(t) dt = J_S \omega_e - J_S \omega_a$

Energiesatz: $\frac{1}{2} m v_e^2 + \frac{1}{2} J_S \omega_e^2 = \frac{1}{2} m v_a^2 + \frac{1}{2} J_S \omega_a^2$ (Stoß ohne Verluste)

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 15

Klassisch (zeichnerisch)

glatt: $\omega_a = \omega_e = 0$

rau: $v_e < v_a$
 $\omega_a = 0, \omega_e > 0$

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 16

Numerisch

FEM: $F \sim s_n^{3/2}$ (Hertz)

PFC: k_n Federsteifigkeit

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 17

Kontakterkennung bei FEM

Knoten - Knoten
 Knoten - Element

Überprüfungs-bereich $10 \cdot l$

Linie - Linie
 Linie - Fläche
 Fläche - Fläche

Kontakt-Wizard (Vorsicht Rechenzeit)

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 18

Kontakterkennung bei FEM

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 19

Kontakterkennung bei FEM

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 20

Kontakterkennung bei PFC

$a < r$
 $a < r_i + r$

explizites Zeit-Integrations-verfahren

Überprüfung im Umfeld von $5 \cdot r_i$ des letzten Zeitschrittes

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 21

Kontaktschersteifigkeit, Coulmb-Gleitreibung

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 22

Kontakt-Verschiebungsgesetz bei PFC

$\frac{1}{k_n} = \frac{1}{k_{n1}} + \frac{1}{k_{n2}}$
 $\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{s2}}$

$F_n = k_n \cdot \Delta s_n$
 $\Delta F_s = k_s \cdot \Delta s_s$
 $|F_s| \leq \mu F_n$

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 23

Berechnungszyklus bei PFC

Aktualisierung der Partikel- und Wandpositionen sowie Kontakterkennung

Lösung der Bewegungsgleichungen für jeden Partikel infolge ΣF_i u. ΣM_i

Lösung der Kraft-Verschiebungsgesetze für jeden Partikel

Kontaktkräfte

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 24

Lösung der Bewegungsgleichungen (PFC)

für ein Partikel gilt:

$$m \begin{matrix} m \\ J_S \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma F_{ix} \\ \Sigma F_{iy} \\ \Sigma M_i^S \end{bmatrix}$$

dyn. Gleichgewicht zur Zeit t : $\underline{M} \ddot{\underline{d}}_t = \underline{f}_t$

Zentrale Differenzenformel: $\ddot{d}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (d_{t-\Delta t} - 2d_t + d_{t+\Delta t})$

neue Lage: $d_{t+\Delta t} = \Delta t^2 \underline{M}^{-1} \underline{f}_t + 2d_t - d_{t-\Delta t}$

explizites Zeitintegrationsverfahren

Stabilitätsbedingung: $\Delta t \leq \Delta t_{krit} = \min(2\sqrt{\frac{m}{k_n}}, 2\sqrt{\frac{I_p}{k_t}})$

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 25

Zeitschritt bei PFC

Eigenfrequenz: $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_n}{m}}$ Stoßzeit: $T_S = \pi \sqrt{\frac{m}{k_n}}$

Zeitschritt in PFC für die Integration: $\Delta t = \sqrt{\frac{m}{k_n}}$

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 26

Roheisenherstellung (COREX-Anlage)

Füllsilo
Schacht

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 27

Fließschema eines COREX-Prozesses

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 28

PFC versus FEM

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 29

Lösung Gesamtgleichungssystem bei FEM

$$\underline{M} \ddot{\underline{d}}_t + \underline{K}(d) \underline{d}_t = \underline{f}_t$$

$$\underline{d}_{t+\Delta t} = \Delta t^2 \underline{M}^{-1} (\underline{f}_t - \underline{K}(d) \underline{d}_t) + 2\underline{d}_t - \underline{d}_{t-\Delta t}$$

Massenmatrix \underline{M} i. a. nicht mehr Diagonalmatrix
Steifigkeitsmatrix \underline{K} nichtlinear, Aufbau in jedem Δt

Explizite FEM-Programmsysteme

- LS-DYNA, ABAQUS Explizit u.a.

Implizite FEM-Programmsysteme

- ANSYS, NASTRAN, ABAQUS u.a.

dyn. Gleichgewicht zur Zeit $t+\Delta t$: $\underline{M} \ddot{\underline{d}}_{t+\Delta t} + \underline{K}(d) \underline{d}_{t+\Delta t} = \underline{f}_{t+\Delta t}$

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 30

2D-Idealisierungen eines 60° Ausschnittes

Ansicht eines 60°- Ausschnittes des Schachtes

Radialschnitt

Tangentialschnitt

Symmetrische Randbedingungen

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 31

Stückerz

Dichte 3800 kg/m³ Innerer Reibungswinkel 45°

Massenstrom 150 t/h Größtkorndurchmesser 35 mm

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 32

Zeitlicher Verlauf

Echtzeit: 20 Sekunden 40 Sekunden 60 Sekunden

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 33

Animation Füllung und Entleerung

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 34

Kontaktkraftverteilung

eventuell Brückenbildung

Schacht Spinnenbein

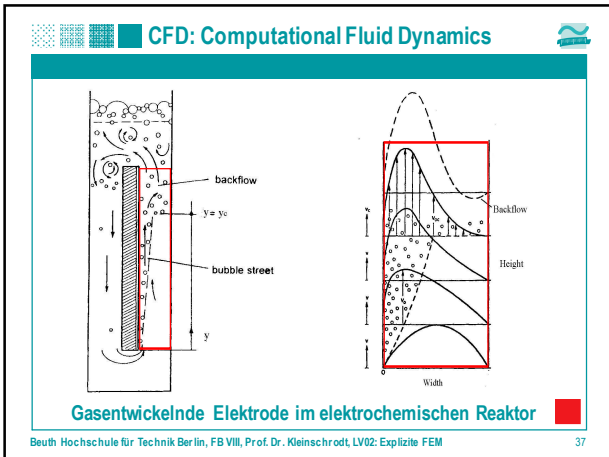
Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 35

Spurverfolgung ausgewählter Partikel

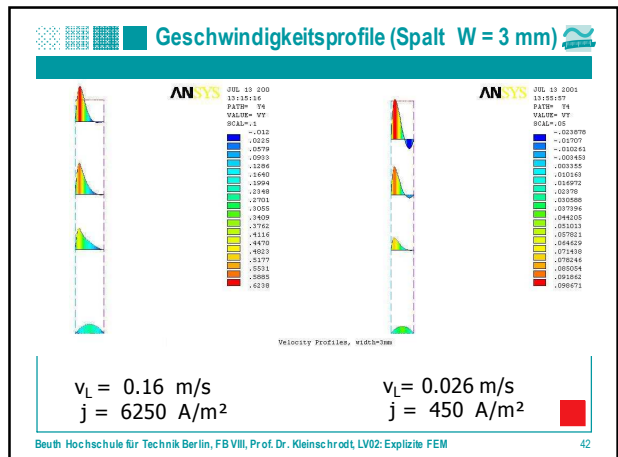
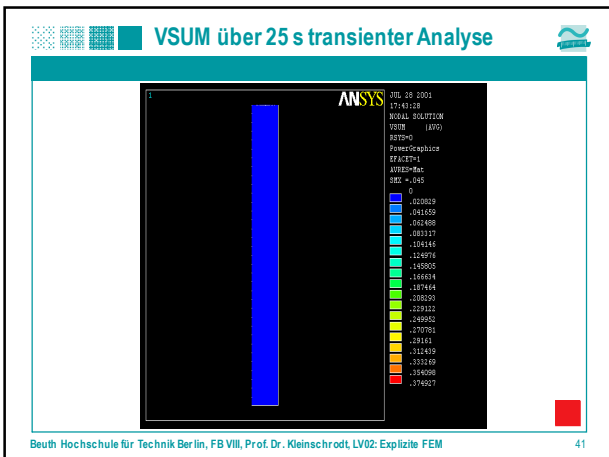
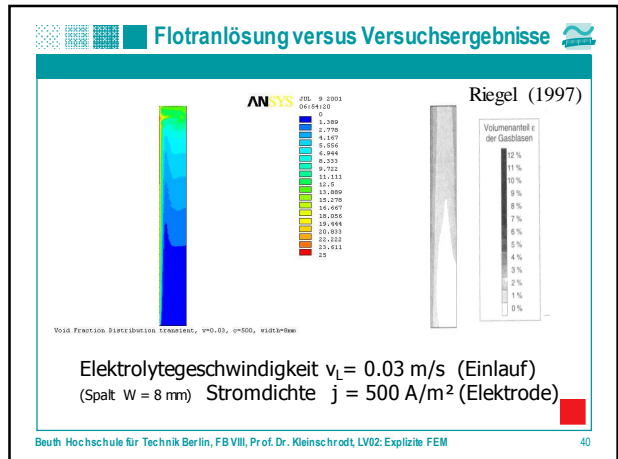
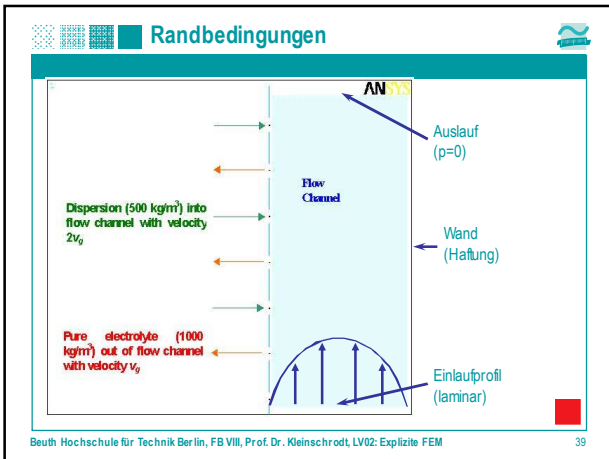
Entmischung

Echtzeit: 120 Sekunden 228 Sekunden

Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 36



- ### Phänomene
- Gasentwicklung \sim Stromstärke
 - Blasendurchmesser $< 50 \mu\text{m}$
 - Blasenstraße oben breiter (Schwerefeld)
 - Mischdichte sinkt (fein verteilte Blasen)
 - Viskosität steigt
 - Rückströmung unerwünscht
 - Ohmscher Widerstand steigt
 - technische und wirtschaftliche Verluste
- Beuth Hochschule für Technik Berlin, FB VIII, Prof. Dr. Kleinschrodt, LV02: Explizite FEM 38





- Numerische Simulation erhöht Verständnis
- Modellwahl ist entscheidend
- Simulation spart Kosten für Versuche
- Verkürzung der Entwicklungszeit
- Nichtlineare Probleme erfordern Spezialwissen
- Erhöhte Anforderungen an die Ausbildung

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit