BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Explizite Finite Elemente Methode

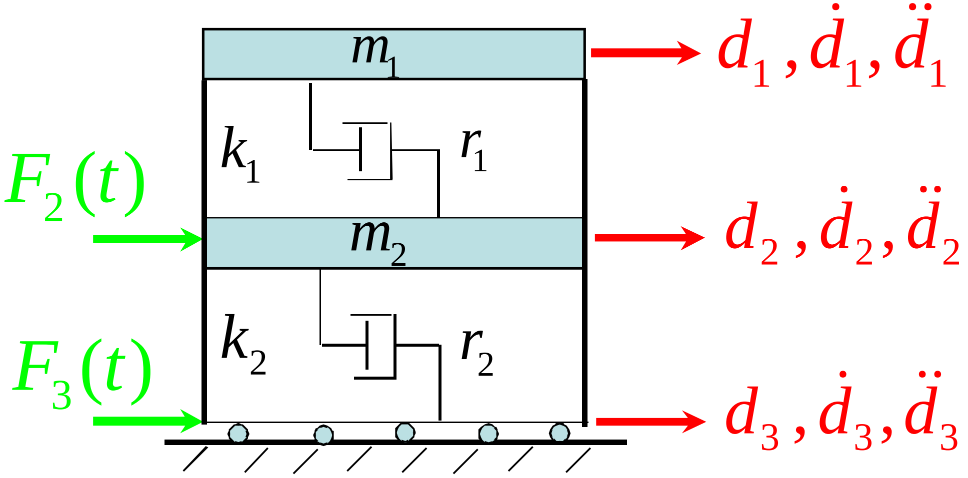
LV05: Masterkurs für MK-M, ME-M und PE-M

Modale Analyse

für lineare Systeme unter dynamischer Belastung

Prof. Dr.-Ing. Hans-Dieter Kleinschrodt
FB VIII: Maschinenbau, Veranstaltungstechnik, Verfahrenstechnik

Dynamisch belastetes System



$$\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 & -r_1 & \\ -r_1 & r_1 + r_2 & -r_2 \\ & -r_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}\;\underline{\ddot{d}}(t) + \underline{\underline{R}}\;\underline{\dot{d}}(t) + \underline{\underline{K}}\;\underline{d}(t) = \underline{f}(t)$$

lineares, inhomogendes DGL-System 2. Ord. (ungefesselt)

Eigenwertproblem (EWP)

Fesselung: $d_3 = 0$ **ungedämpft:** $r_i = 0$ **homogen:** $F_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ansatz:

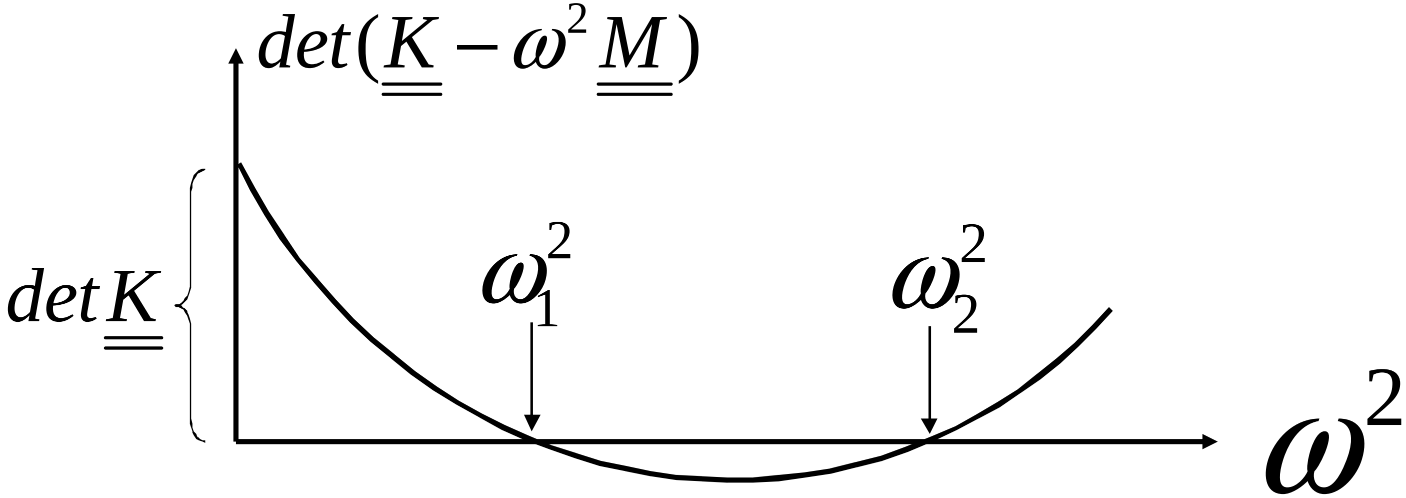
$$\underline{d}(t) = \underline{\hat{d}} \sin(\omega t)$$

$$\underline{\ddot{d}}(t) = -\omega^2 \underline{\hat{d}} \sin(\omega t)$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}})}_{\det(\ldots) = 0} \underline{\hat{d}} = \underline{0} \qquad \textbf{(EWP)}$$

nicht triviale Lösung: $\det(\ldots) = 0$

Eigenfrequenzen und Eigenformen



Bei $\omega^2 = \omega_i^2$ ist die Gesamtmatrix singulär.
Die Eigenformen $\hat{\underline{d}}_i$ (1. und 2. Schwingungsform) sind nur bis auf einen frei wählbaren Faktor bestimmbar:

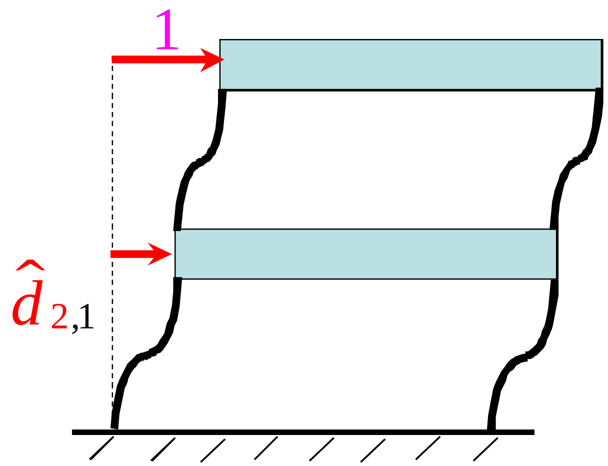
$$(\underline{\underline{K}} - \omega_i^2 \underline{\underline{M}})\hat{\underline{d}}_i = \underline{0}$$

1. und 2. Eigenform (Eigenvektoren EV)

Vorgabe: $\hat{d}_{1,1} = 1$ **bei 1. EV** ω_1^2

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} - \omega_1^2 \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ \hat{d}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

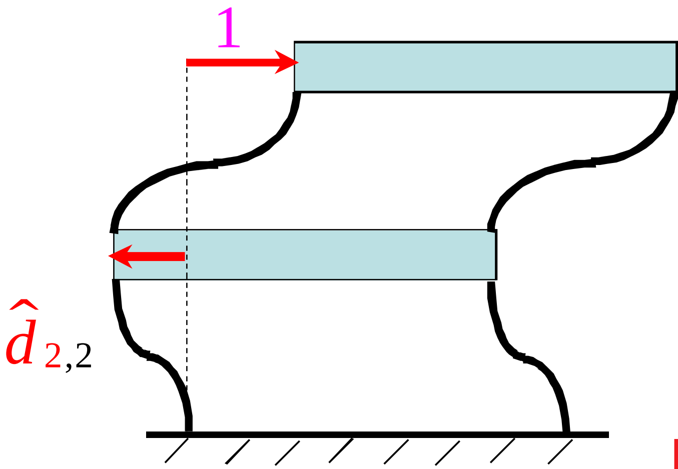
$$-k_1 1 + (k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_2)\hat{d}_{2,1} = 0$$



Vorgabe: $\hat{d}_{1,2} = 1$ **bei 2. EV** ω_2^2

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} - \omega_2^2 \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ \hat{d}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{d}_{2,2} = \frac{k_1 1}{(k_1 + k_2 - \omega_2^2 m_2)}$$



Modalansatz für großen Systemen

inhomogenes DGL-System mit **n** Freiheitsgraden (gedämpft):

$$\underline{\underline{M}}\ \ddot{\underline{d}}(t) + \underline{\underline{R}}\ \dot{\underline{d}}(t) + \underline{\underline{K}}\ \underline{d}(t) = \underline{f}(t)$$

Ansatz: $$\underline{d}(t) = \hat{\underline{d}}_1\ a_1(t) + \hat{\underline{d}}_2\ a_2(t) + \ldots\ldots \hat{\underline{d}}_m\ a_m(t)$$

$$\underline{d}(t) = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \hat{\underline{d}}_1 & \hat{\underline{d}}_2 & \ldots & \hat{\underline{d}}_m \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \ldots \\ a_m(t) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{a}(t)$$

m << n

$$\dot{\underline{d}}(t) = \underline{\underline{\Phi}}\,\dot{\underline{a}}(t)$$

$$\ddot{\underline{d}}(t) = \underline{\underline{\Phi}}\,\ddot{\underline{a}}(t)$$

$$\underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Phi}}}_{\begin{bmatrix} m_{gen,1} & & & \\ & m_{gen,2} & & \\ & & \ldots & \\ & & & m_{gen,m} \end{bmatrix}} \ddot{\underline{a}}(t) + \underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\Phi}}}_{\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}} \dot{\underline{a}}(t) + \underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Phi}}}_{\begin{bmatrix} k_{gen,1} & & & \\ & k_{gen,2} & & \\ & & \ldots & \\ & & & k_{gen,m} \end{bmatrix}} \underline{a}(t) = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{f}(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_{gen,1} \\ f_{gen,2} \\ \ldots \\ f_{gen,m} \end{bmatrix}$$