BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Explizite Finite Elemente Methode

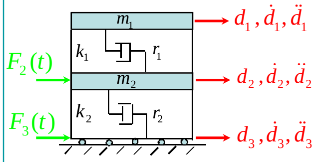
LV05: Masterkurs für MK-M, ME-M und PE-M

Modale Analyse

für lineare Systeme unter dynamischer Belastung

Prof. Dr.-Ing. Hans-Dieter Kleinschrodt
FB VIII: Maschinenbau, Veranstaltungstechnik, Verfahrenstechnik

Dynamisch belastetes System



$$\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot d_1 \\ \ddot d_2 \\ \ddot d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 & -r_1 & \\ -r_1 & r_1+r_2 & -r_2 \\ & -r_2 & r_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot d_1 \\ \dot d_2 \\ \dot d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}\;\underline{\ddot d}(t) \;+\; \underline{\underline{R}}\;\underline{\dot d}(t) \;+\; \underline{\underline{K}}\;\underline{d}(t) \;=\; \underline{f}(t)$$

lineares, inhomogenes DGL-System 2. Ord. (ungefesselt)

Eigenwertproblem (EWP)

Fesselung: $d_3 = 0$ **ungedämpft:** $r_i = 0$ **homogen:** $F_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot d_1 \\ \ddot d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

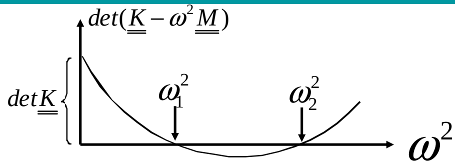
Ansatz: $\underline{d}(t) = \underline{\hat d}\sin(\omega t)$

$$\underline{\ddot d}(t) = -\omega^2\,\underline{\hat d}\sin(\omega t)$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{K}} - \omega^2\,\underline{\underline{M}})}_{\det(\ldots)=0}\underline{\hat d} = \underline{0} \qquad \textbf{(EWP)}$$

nicht triviale Lösung: $\det(\ldots) = 0$

Eigenfrequenzen und Eigenformen



Bei $\omega^2 = \omega_i^2$ ist die Gesamtmatrix singulär.
Die Eigenformen $\underline{\hat d}_i$ (1. und 2. Schwingungsform)
sind nur bis auf einen frei wählbaren Faktor bestimmbar:

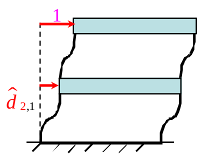
$$(\underline{\underline{K}} - \omega_i^2\,\underline{\underline{M}})\underline{\hat d}_i = \underline{0}$$

1. und 2. Eigenform (Eigenvektoren EV)

Vorgabe: $\hat d_{1,1} = 1$ **bei 1. EV** ω_1^2

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} - \omega_1^2\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ \hat d_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

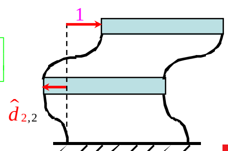
$$-k_1 1 + (k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_2)\hat d_{2,1} = 0$$



Vorgabe: $\hat d_{1,2} = 1$ **bei 2. EV** ω_2^2

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} - \omega_2^2\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ \hat d_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat d_{2,2} = \frac{k_1 1}{(k_1 + k_2 - \omega_2^2 m_2)}$$



Modalansatz für großen Systemen

inhomogenes DGL-System mit n Freiheitsgraden (gedämpft):

$$\underline{\underline{M}}\;\underline{\ddot d}(t) + \underline{\underline{R}}\;\underline{\dot d}(t) + \underline{\underline{K}}\;\underline{d}(t) = \underline{f}(t)$$

Ansatz: $\underline{d}(t) = \underline{\hat d}_1\, a_1(t) + \underline{\hat d}_2\, a_2(t) + \ldots\ldots \underline{\hat d}_m\, a_m(t)$

m << n

$$\underline{d}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \underline{\hat d}_1 & \underline{\hat d}_2 & \cdots & \underline{\hat d}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \cdots \\ a_m(t) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{a}(t)$$

$$\underline{\dot d}(t) = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\dot a}(t)$$

$$\underline{\ddot d}(t) = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\ddot a}(t)$$

$$\underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\Phi}}}_{\begin{bmatrix} m_{gen,1} & & & \\ & m_{gen,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{gen,m} \end{bmatrix}}\underline{\ddot a}(t) + \underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\Phi}}}_{\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}}\underline{\dot a}(t) + \underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\Phi}}}_{\begin{bmatrix} k_{gen,1} & & & \\ & k_{gen,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_{gen,m} \end{bmatrix}}\underline{a}(t) = \underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T\underline{f}(t)}_{\begin{bmatrix} f_{gen,1} \\ f_{gen,2} \\ \cdots \\ f_{gen,m} \end{bmatrix}}$$