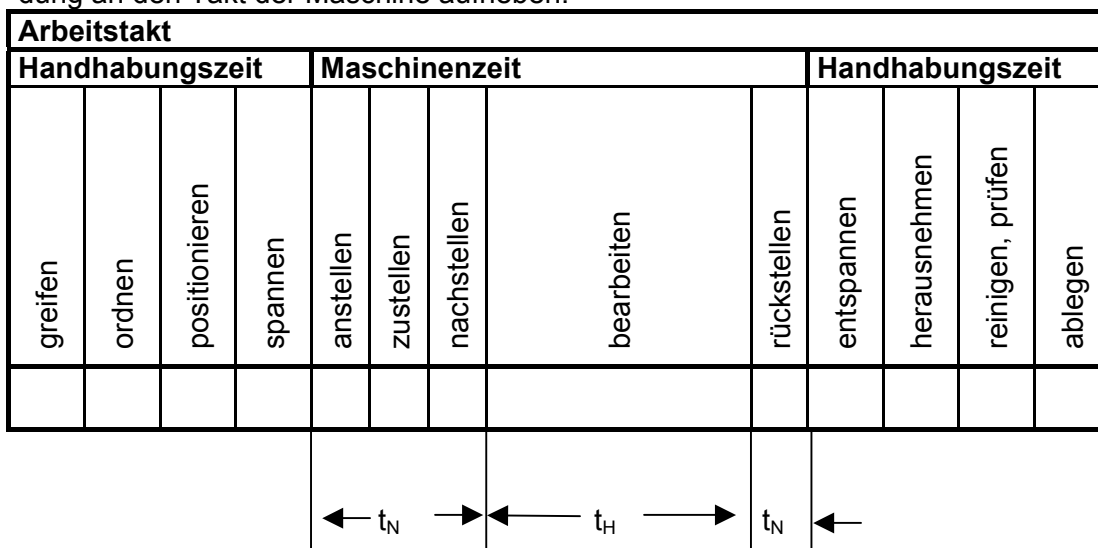


6. Handhabungsgeräte und Industrie-Roboter

6.1 Allgemeines

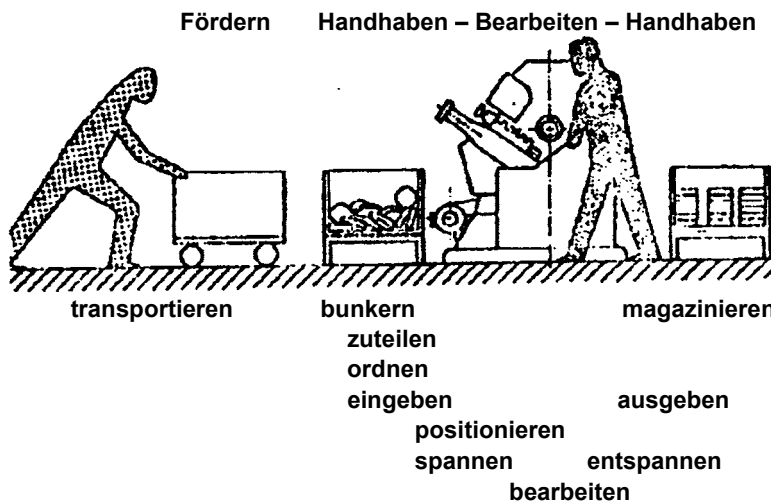
Jeder Fertigungsvorgang erfordert ein Zusammenwirken von Materialbereitstellung und Werkstückbearbeitung. Durch die Einführung der NC-Technologie wurden die **Haupt- und Nebenzeiten** in der Klein- und Mittelserienfertigung minimiert. Die Materialbereitstellung ist in der Massen- und Großserienfertigung von besonderer Bedeutung. Im maschinennahen Bereich ist die Materialbereitstellung weitgehend mit Hilfe von speziellen Einlegegeräten gelöst.

In [Bild 6.1](#) ist ein Arbeitstakt zerlegt. **Zeitstudien** bei der Fertigung auf Werkzeugmaschinen ergaben, dass der Zeitanteil für die Handhabung, etwa **50 % des Arbeitstaktes** beträgt. In der Montage ist dieser Anteil noch erheblich höher. Für eine Automatisierung einer Fertigung ist die Automatisierung der Handhabung dringend erforderlich. Nur dadurch lässt sich die zeitliche Bindung an den Takt der Maschine aufheben.



[Bild 6.1](#): Arbeitstakt bei der Fertigung auf Werkzeugmaschinen

Im Bereich des innerbetrieblichen Materialflusses unterscheidet man Transport und Handhabung ([Bild 6.2](#) und [Bild 6.3](#)).



[Bild 6.2](#): Innerbetrieblicher Materialfluss (manuell)

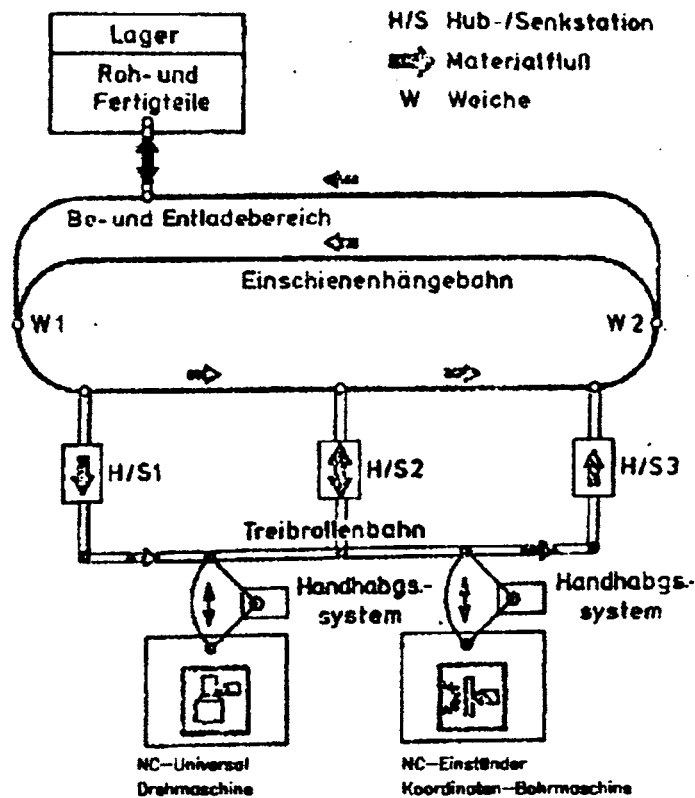


Bild 6.3: Innerbetrieblicher Materialfluss (automatisch)

Die Funktionen des Transportes ist die Ortsveränderung (Position) von Gütern. Die **Handhabung** hingegen ändert die **Orientierung und Positionierung** von Objekten im Bereich der Fertigungseinrichtungen.

Der Begriff der Handhabung ist wie folgt **definiert**:

Unter Handhabung sind alle Vorgänge zu verstehen, die dem Erzeugen oder vorübergehenden Aufrechterhalten einer gewissen Orientierung und gegebenenfalls einer Position von Stückgütern dienen, ohne eine beabsichtigte stoffliche Veränderung an ihnen durchzuführen.

6.2 Handhabungsgeräte

Handhabungsgeräte sind Arbeitsmaschinen, die zur Handhabung von Objekten mit zweckdienlichen Einrichtungen, wie z.B. Greifern oder Werkzeugen ausgerüstet sind. Die Einteilung der Handhabungsgeräte wird nach Art der auszuführenden Steuerungsaufgabe vorgenommen. Die Funktionen, wie z.B.:

- **Speichern,**
- **Ort verändern,**
- **Richtung verändern**
- **Halten**

werden mit speziellen Sinnbildern belegt und sind im folgenden Bild dargestellt.

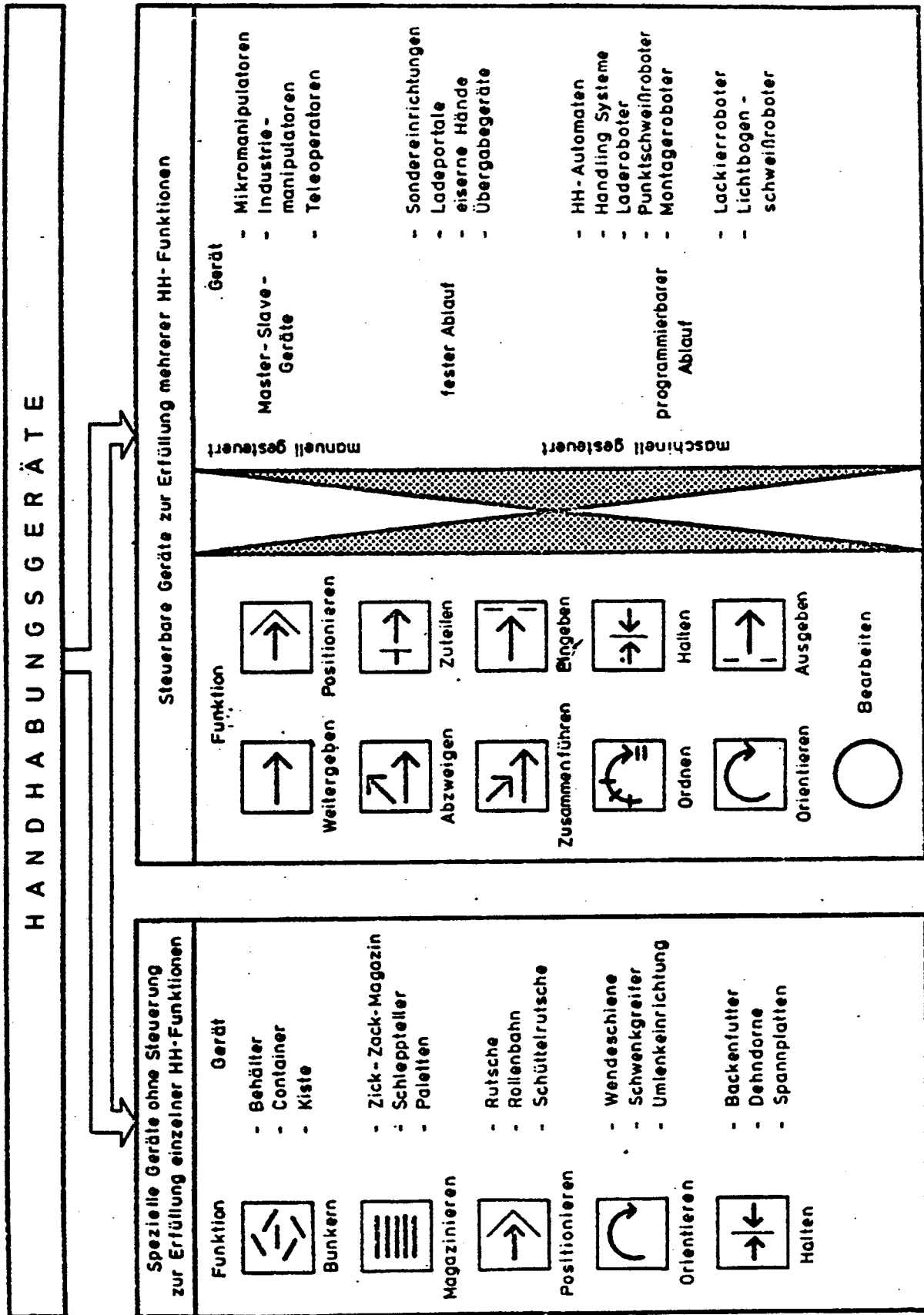


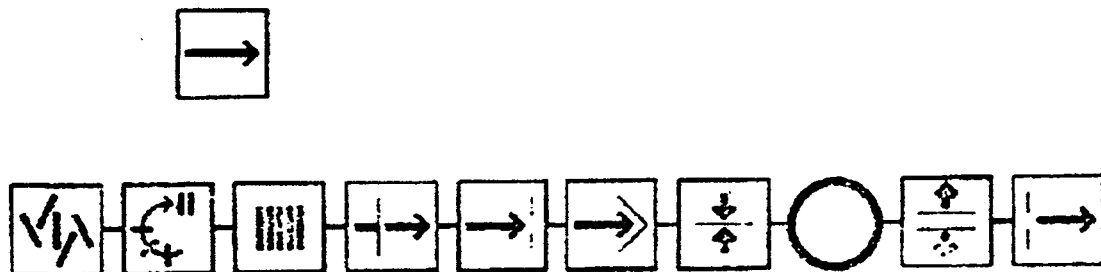
Bild 6.4: Funktionen von Handhabungsgeräten

6.3 Handhabungsfunktionen für Zubringereinrichtungen

Die am häufigsten benötigten Zubringerfunktionen sind:

- **Bunkern**
- **Ordnen**
- **Magazinieren**
- **Zuteilen**
- **Eingeben**
- **Positionieren**
- **Spannen**
- **Bearbeiten**
- **Entspannen**
- **Ausgeben**

Ein solcher Arbeitsvorgang ist im folgenden Bild dargestellt.



[Bild 6.5:](#) Reihenfolge und Kombination von Zubringerfunktionen

Das Weitergeben kann auch innerhalb einer dieser Funktionen auftreten. Diese Funktionen können sich auch wiederholen, besonders dann, wenn ein Werkstück bei einer verketteten Fertigung mehrere Stationen durchläuft. Die Folge der Fertigungs- und Zubringerfunktionen wird in einem Zubringerplan mit Sinnbildern festgehalten. Hierbei versucht man die Anzahl der Zubringerfunktionen so weit wie möglich zu minimieren. Die Automatisierung des Werkstückdurchlaufs macht unter Umständen eine Änderung der Reihenfolge einer Bearbeitung notwendig. Gestaltung und Funktion von Zubringerfunktionen werden von den Eigenschaften und dem Verhalten der Werkstücke und den Fertigungseinrichtungen auf denen diese Werkstücke bearbeitet werden, bestimmt. Die **Eigenschaften** der Werkstücke, die die Zubringerfunktionen beeinflussen, sind:

- **Gestalt**
- **Gewicht**
- **Größe**
- **Lagestabilität**
- **Rollfähigkeit**
- **Gleitfähigkeit**
- **Richtungsstabilität**
- **Stapelfähigkeit**
- **Oberflächenempfindlichkeit**
- **Steifigkeit**

Die Konzeption von Zubringereinrichtungen ist auch von den Eigenschaften der Fertigungseinrichtung abhängig:

- **Anbaumöglichkeiten für Zubringereinrichtungen**
- **Taktzeit**
- **Stückzahl**
- **Größe und Zugänglichkeit des Arbeitsraumes**
- **Antrieb und Steuerung der Zubringereinrichtung**

Im Folgenden werden die Zubringerfunktionen definiert und Anwendungsbeispiele gezeigt.

Erste Stufe:

Alle Handhabungsfunktionen werden manuell ausgeführt. Die Bedienperson bestimmt den Arbeitstakt. Es entstehen lange Zubringerwege und die ergonomische Gestaltung des Arbeitsplatzes ist ungünstig.

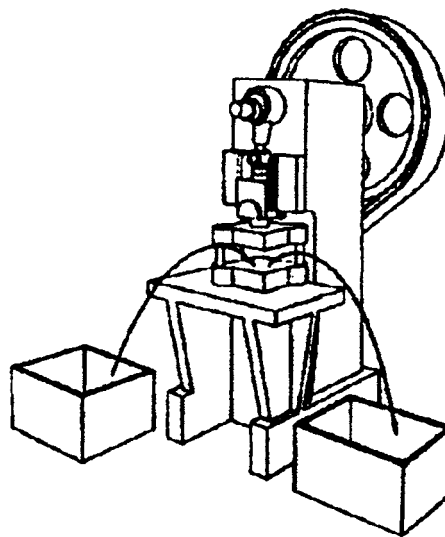
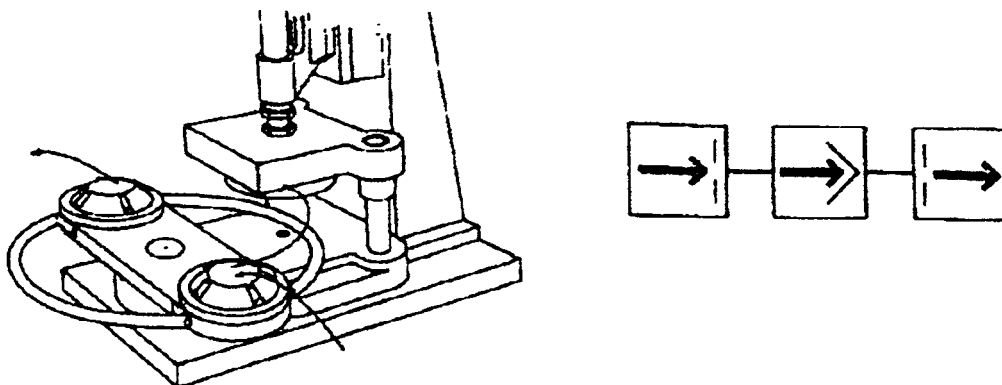


Bild 6.6: Erste Stufe

Zweite Stufe:

Die Handhabungsfunktionen "Eingeben", "Positionieren", "Ausgeben" sind automatisiert.



[Bild 6.7](#): Zweite Stufe

Dritte Stufe:

Die Handhabungsfunktionen "Eingeben", "Positionieren", "Ausgeben" sind automatisiert, ebenso wie das Ausgeben aus dem Rundtisch. Die Maschine beginnt in dieser Stufe mit der Bestimmung des Arbeitstaktes und trägt so zur Monotonisierung der verbleibenden Handhabungsfunktionen "Ordnen" und "Zuteilen" aus dem gebunkerten Zustand bei. Diese Auswirkungen der Teilautomatisierung werden bei einer vollständigen Automatisierung beseitigt, mit dem Ziel den Mensch vom Arbeitstakt der Maschine zu entbinden.

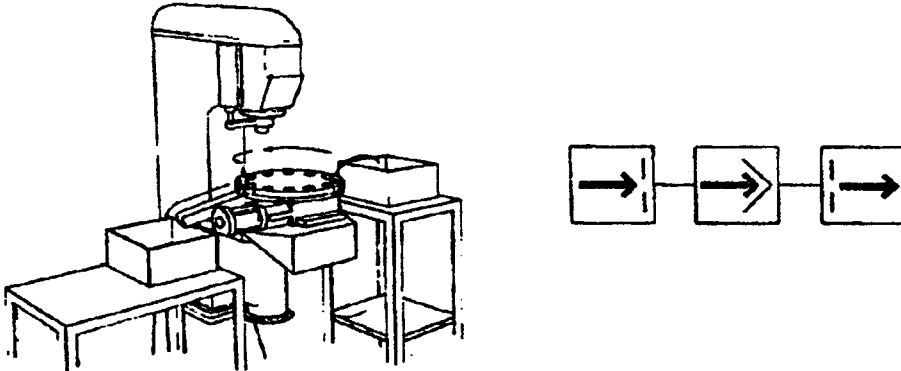


Bild 6.8: Dritte Stufe

Vierte Stufe:

Die Handhabungsfunktionen "Magazinieren", "Zuteilen", "Eingeben", "Positionieren", "Ausgeben", "Magazinieren", "Zuteilen", "Eingeben", "Positionieren", "Ausgeben", "Bunkern" sind automatisiert. Das Ordnen der Werkstücke und Füllen der Magazine wird manuell vorgenommen. Die Bedienperson ist hierbei unabhängig vom Arbeitstakt.

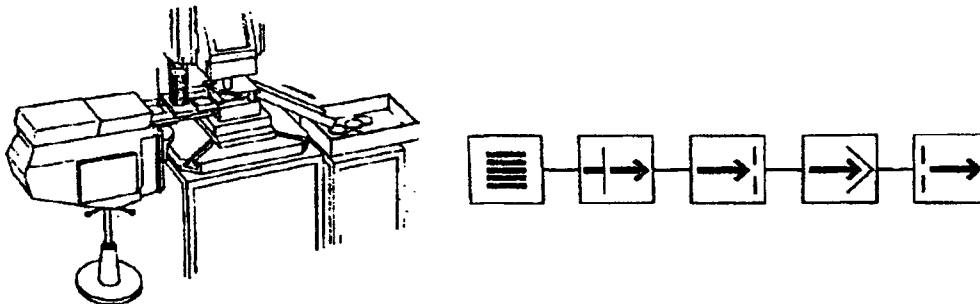


Bild 6.9: Vierte Stufe

Fünfte Stufe:

Alle Handhabungsfunktionen sind automatisiert.

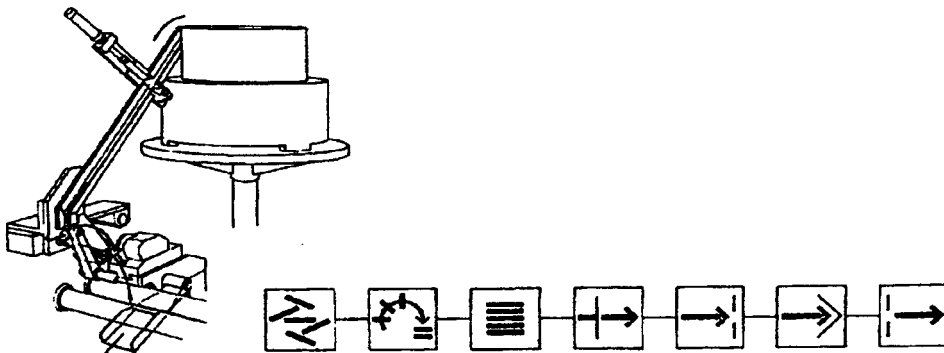


Bild 6.10: Fünfte Stufe

6.4 Industrie-Roboter

Mit der Einführung von Datenverarbeitungsanlagen in der Fertigung konnte mittels flexibler NC-Maschinen die Klein- und Mittelserienfertigung automatisiert werden. Um den Automatisierungsumfang dieser kapitalintensiven Anlagen zu erhöhen, war man bemüht, auch die Handhabungsfunktionen durch den Einsatz von flexiblen Handhabungseinrichtungen zu automatisieren. Neben der **Produktivitätssteigerung** waren die Erweiterungen der Kapazität der Fertigungseinheit und die **Humanisierung** der Arbeitsplätze zwingende Gründe für die Entwicklung von Industrie-Robotern.

Industrie-Roboter sind Arbeitsmaschinen, die zur selbsttätigen Handhabung von Objekten oder zur Durchführung von Fertigungsoperationen mit zweckdienlichen Werkzeugen ausgerüstet sind. Sie sind in mehreren Bewegungsachsen hinsichtlich Arbeitsablauf und Position programmierbar. Im folgenden Bild ist die Verteilung von Industrie-Robotern auf die unterschiedlichen Produktionszweige zu sehen.

Handhabungsaufgaben					
Werkstückhandhabung		Werkzeughandhabung		Objekthandhabung	
Pressen	15 %	Beschichten	22 %	Glashandhabung	5 %
Schmiedemaschinen	4 %	Schweißen	28 %	Palletieren	3 %
Druckgussmaschinen	11 %	Montieren	3 %		
Werkzeugmaschinen	8 %				
Prüfmaschine	1 %				

Bild 6.11: Einteilung der Handhabungsaufgaben für Industrie-Roboter

Industrie-Roboter bestehen aus den Baugruppen:

- **Antrieb**
- **Wegmess-System**
- **Steuerung**
- **Kinematik**
- **Greifer**
- **Sensoren**

In folgendem Bild ist die gegenseitige Beeinflussung dieser Baugruppen untereinander dargestellt:

Antrieb	Steuerung	Wegmess-System
Kinematik		
Greifer		Sensoren
Objekt		

[Bild 6.12](#): Baugruppen von Industrie-Robotern

6.4.2 Kinematik

Mit Industrie-Robotern werden die **Orientierung** und die **Position** von festen Körpern verändert.

Zur **Beschreibung der Lage** eines festen Körpers im Raum sind **sechs Freiheitsgrade** notwendig. Legt man ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem zugrunde, werden **drei translatorische** Freiheitsgrade zur Festlegung der Position eines Körperpunktes und **drei rotatorische** zur Orientierung des Körpers benötigt. Im allgemeinen lassen sich Schiebungen aus Drehungen erzeugen, deshalb können räumliche Bewegungen zum Handhaben durch eine Kombination aus beiden erzielt werden.

Zum **Positionieren eines Körperpunktes** innerhalb eines raumfesten kartesischen Koordinatensystems sind deshalb drei Freiheitsgrade notwendig. Diese lassen sich durch sinnvolle Anordnung von mindestens drei Achsen herstellen.

Die Kombination von Linear- und Drehachsen sowie deren Anordnung legt den Arbeitsraum des Industrie-Roboters fest, der sich durch das Bewegungskoordinatensystem oder auch durch die Geometrie seiner Begrenzungsflächen definieren lässt. In [Bild 6.13](#) sind diese Zusammenhänge für 3-achsige Grundsysteme dargestellt.

Achs-kombination	Koordinatenbezeichnung	Achsenbezeichnung	Arbeitsräume	
3 Linearachsen	Kartesische – Koordinaten		quaderförmig	
2 Linearachsen 1 Drehachse	Zylinder – Koordinaten		zylindrisch	
1 Linearachsen 2 Drehachsen	Kugel – Koordinaten		sphärisch	
3 Drehachsen	Gelenk – Koordinaten		torusähnlich	
m Linearachsen n Drehachsen	Kartesische – und Gelenk – Koordinaten		kinematisch überbestimmt	

[Bild 6.13](#): Arbeitsräume und Bewegungskoordinaten von Industrie-Robotern

Systeme, die mehr als sechs Bewegungsachsen haben, sind **kinematisch überbestimmt**, so dass ein Raumpunkt wahlweise durch Verfahren verschiedener Achsen erreicht werden kann. Solche Systeme werden häufig für komplizierte Handhabungsaufgaben oder in der Montage eingesetzt.

Die Kinematik nimmt hinsichtlich der Flexibilität der Handhabungsgeräte eine Sonderstellung ein. Die Konzeption des kinematischen Aufbaus bestimmt die Beweglichkeit und die Kollisionsbedingungen. Die Beweglichkeit einer kinematischen Kette drückt sich in dem Vermögen aus, Hindernisse zu umgehen oder beispielsweise in Hohlkörper zu greifen. In [Bild 6.14](#) sind die Einflussgrößen der kinematischen Konzeption auf die Kenngrößen von Industrie-Robotern dargestellt.

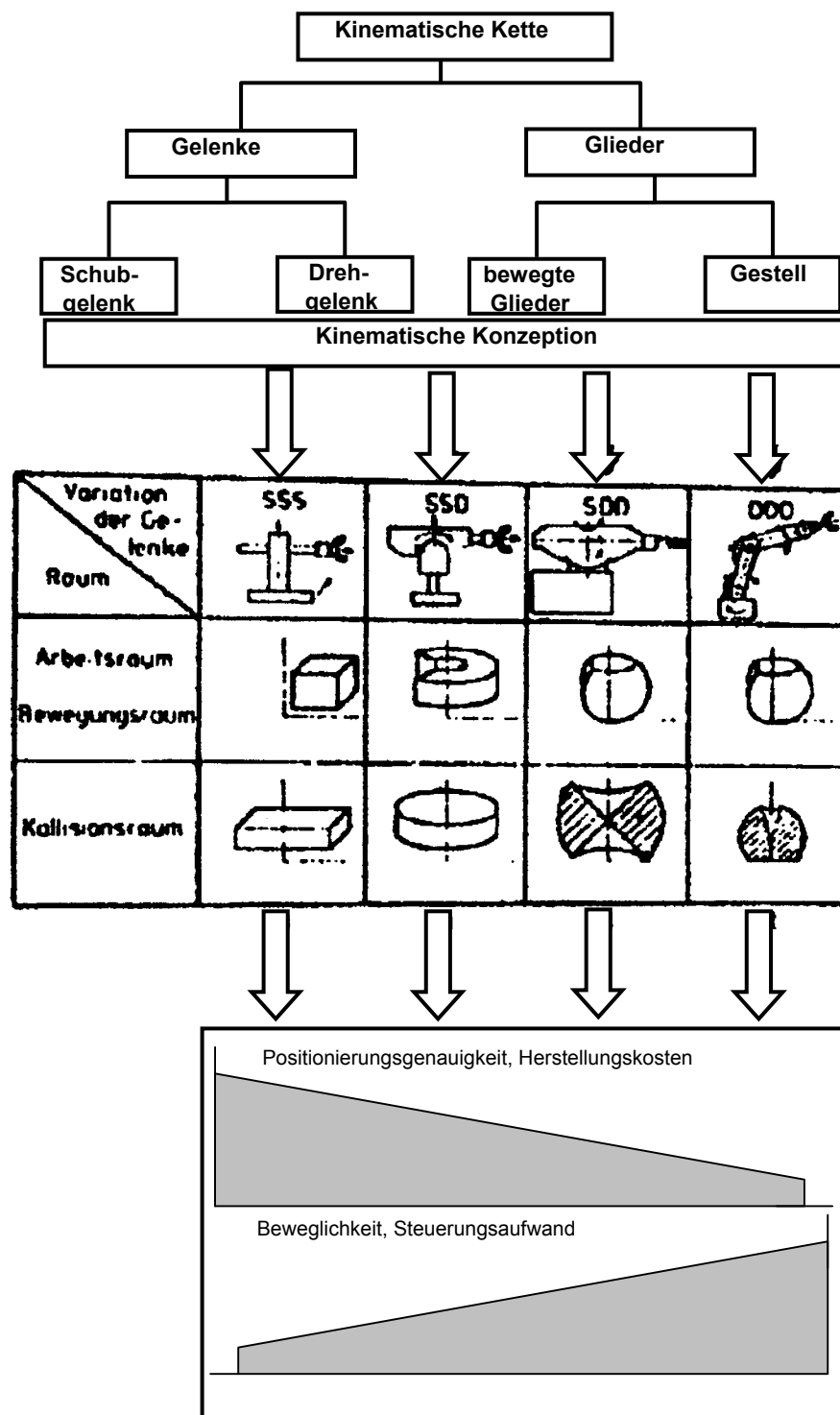


Bild 6.14: Kinematische Kenngrößen von Industrie-Roboter

In der Steuerung für Industrie-Roboter müssen die Koordinaten, die im NC-Programm in kartesischer Form abgelegt sind, mit Hilfe der inversen Transformation in achsspezifische Daten umgerechnet werden. Die Vorwärtstransformation wird benötigt, wenn aus den achsspezifischen Daten die kartesischen Daten berechnet werden.

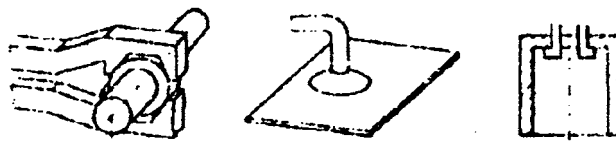
6.4.3 Greifer

Eine weitere Baugruppe, die die Flexibilität von Handhabungsgeräten bestimmt, sind die Greifer. Bei der NC-Werkzeugmaschine sind die Spannzeuge vergleichbar. Für die flexible Fertigung stellen diese Baugruppen die Engpässe dar, da keine universell einsetzbare Lösungen bekannt sind.

Die Greifer lassen sich hinsichtlich der Greifprinzipien unterscheiden:

- **Mechanische Greifer (geringe Flexibilität)**
- **Saug-Greifer (große Flexibilität)**
- **Magnet-Greifer (große Flexibilität)**
- **Athäsions-Greifer (große Flexibilität)**
- **Elektrostatische Greifer (große Flexibilität)**

Jeder der genannten Greifer ist für eine bestimmte Werkstückgruppe, die sogenannte Greifteilefamilie, ausgelegt (Bild 6.15)

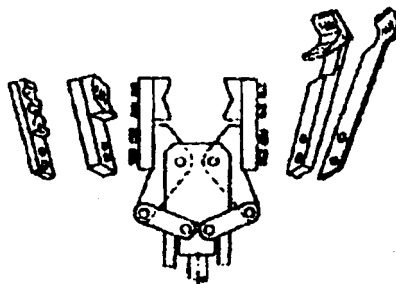


[Bild 6.15](#): Greifer mit Werkstücken aus der Greifteilefamilie

Aufgrund gewünschter Anforderungen, wie hohe Positionierungsgenauigkeit, Kontur oder Oberflächenbeschaffenheit des Werkstückes usw. werden für die Greifteilefamilie "Drehteile" oder die Greifteilefamilie "Prismatische Teile" vorrangig mechanische Greifer verwendet. Bei diesen Greifern wird die Kräfteinleitung zum Greifen an der Wirkstelle Greiffinger - Werkstück durch Formschluss oder Kraftschluss erfolgen. Der Formschluss ist hinsichtlich der Greifsicherheit und Greifkraft von Vorteil, aber er ist meist schwieriger zu realisieren. Die Bemühungen zur flexiblen Gestaltung von Handhabungsgeräten führen im Bereich der Greifer zu folgenden Entwicklungen:

- **Greiferwechsel**
- **Greiffingerwechsel**
- **Universalgreifer mit einstellbarem Greifbereich**

Dies ist in den folgenden Bildern dargestellt.



[Bild 6.16](#): Greifer mit Greiffingerwechsel

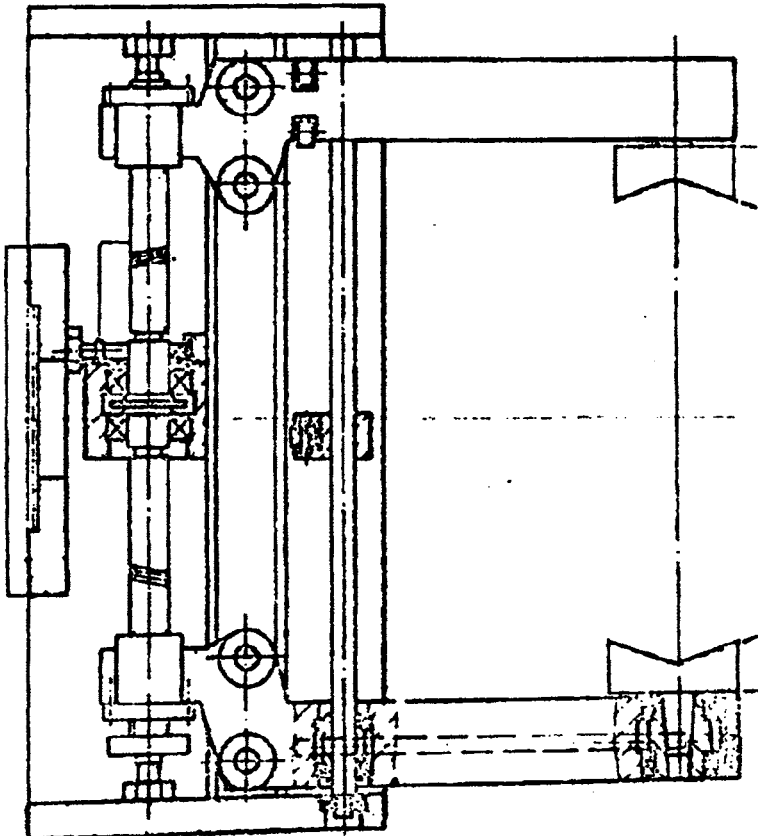


Bild 6.17: Doppelfinger-Parallel-Greifer

6.4.4 Sensoren

Durch den Einsatz von Sensoren kann der Greifvorgang weiter automatisiert werden. Mit integrierten Sensoren werden die Form- und Lageerkennung von Werkstücken und die Greiferkräfte überwacht. Fehlen aufwendige Sensoren, so muss die Position und Orientierung eines Werkstückes durch Zubringeeinrichtungen bestimmt werden und der Steuerung des Industrie-Roboters bekannt gemacht werden. Zur Automatisierung werden geeignete Sensoren eingesetzt, die das jeweilige Werkstück erkennen und dessen Lage und Orientierung bestimmen. Folgende Entwicklungsschritte werden hierfür durchgeführt:

- **Entwicklung von traktilen Sensoren für Montageaufgaben, die mit Kraftmess-Sensoren ausgestattet sind**
- **Entwicklung von visuellen Sensoren zur Form- und Lageerkennung von Werkstücken**
- **Einführung geeigneter Sensorschnittstellen in der Steuerung für Industrie-Roboter**

6.4.5 Aufbau der Roboter-Steuerung

Die wichtigste Voraussetzung für den wirtschaftlichen Einsatz von Industrie-Robotern ist ihre Anpassungsfähigkeit an wechselnde Aufgaben. Diese Eigenschaft wird auch hier im wesentlichen durch die angeschlossene Steuerung und deren Programmiermöglichkeiten bestimmt. Numerische Steuerungen, wie sie für den Einsatz an spanenden Werkzeugmaschinen standardmäßig geliefert werden, eignen sich nur bedingt zum Steuern von Industrie-Robotern, da hier andere Anforderungen gestellt werden. Wie bei NC-Steuerungen wird auch hier gefordert.

- **hohe Speicherkapazität für Programme**
- **Unterprogrammtechnik**
- **Korrekturmöglichkeit der Programme**
- **Aus- und Eingänge für Zusatzfunktionen**
- **geringe Satzwechselzeiten**

Zusätzlich notwendig sind:

- **die Programmeingabe im Teach-In-Verfahren**
- **Koordinatentransformation**
- **Bahnsteuerung in sechs Achsen**
- **Sensorschnittstellen**

Bei punktgesteuerten Robotern sind die Positionen in allen Achsen programmierbar. Jede Achse ist mit einem Wegmess-System, Servoantrieb und Lageregler versehen. Die programmierten Punkte werden als Punktsteuerung ohne funktionellen Zusammenhang zwischen den Positionen erreicht. Die Programmerstellung für das NC-Programm erfolgt entweder OFFLINE

oder ONLINE mit Hilfe des Teach-In-Verfahrens. Bei der Teach-In-Programmierung wird der Roboter in der Werkstatt programmiert. Mittels eines Programmierhandgerätes wird der Roboter auf den nächsten Punkt der erreicht werden soll bewegt. Zum Programmieren werden in dem zugehörigen NC-Satz in der Steuerung dann die Sollwerte der Lageregler für die einzelnen Achsen in die achsspezifischen Koordinaten übernommen. Dieses so erstellte Programm ist jedoch spezifisch an diesen speziellen Roboter, für den es programmiert wurde, gebunden. Es ist nicht auf einem anderen Roboter, mit einer abweichenden Kinematik, übertragbar. Auch ändern sich die Istpositionen und damit die Bearbeitungsgenauigkeiten, wenn sich die Last, die der Roboter trägt verändert. Die Programmierung erfolgt vor Ort und ist zeitintensiv. Längere Stillstandszeiten der Fertigungsanlage können auftreten.

Bahngesteuerte Industrie-Roboter ermöglichen frei programmierbare Bewegungsabläufe in allen Achsen. Die Bahngeschwindigkeit ist programmierbar. Auch hier kann die Programmierung im Teach-In-Verfahren erfolgen. Mit Hilfe eines Handbediengerätes wird der Roboter in die gewünschte Position gebracht und die Bahn zwischen den programmierten Positionen wird bestimmt. Hier bieten sich Gerade und Kreis an. Damit wird es möglich, definierte Bahnen zwischen den programmierten Punkten zu erreichen. Falls diese Bahnen in sechs Koordinaten verfahren werden, kann die Orientierung des Werkzeuges auf der Bahn konstant gehalten werden. Die Punkte sind beim Teach-In-Verfahren in maschineneigenen Koordinaten im NC-Programm abgelegt. Die zu verfahrenende Bahn wird aber im kartesischen Koordinatensystem definiert. Somit ist zur Berechnung der Lagesollwerte für die Lageregler der einzelnen Achsen, eine Vorwärtstransformation von geräteeigenen Koordinaten in kartesische Koordinaten erforderlich. Hierzu ist eine hohe Rechenleistung notwendig. Bahnsteuerungen ermöglichen es beim Betrieb Kollisionsräume zu vermeiden.

Die durch Teach-In-Programmierung erstellten Programme sind an den Robotertyp, für den diese Programme erstellt wurden, gebunden. Die Wiederholgenauigkeit ändert sich mit dem Belastungszustand des Roboters.. Ein Programmierhandgerät zur Teach-In-Programmierung enthält folgende Funktionen:

- **Bewegen der Roboterachsen**
- **Erstellung des NC-Programms**
- **Test und Korrektur des NC-Programms**

Das Programmieren ist zeitintensiv und die Fertigungsanlage muss hierzu zur Verfügung stehen

Deshalb wurden Verfahren zur OFFLINE-Programmierung von Robotern entwickelt. Die OFFLINE-Programmierung wird aufgrund eines kinematischen Modells des Roboters und seines Kollisionsraumes durchgeführt. Sind die Lasten, die der Roboter trägt bekannt, so können die NC-Programme für die gewünschten Bewegungen erstellt werden. Die Maschinenkoordinaten werden mittels der inversen Transformation berechnet und im zu erstellenden NC-Programm gespeichert.

Sensoren, die den Bewegungsvorgang überwachen, liefern Korrekturwerte für die Positionen im kartesischen Koordinatensystem. Sie können mit Hilfe einer Sensorschnittstelle eingelesen werden und vor der Vorwärtstransformation der kartesischen Koordinaten berücksichtigt werden. Um die Verzögerungszeiten für die Sensorsignale minimal zu halten, wird für die Koordinatentransformation eine kleine Rechenzeit gewünscht.

Im folgenden Bild ist der Aufbau einer Robotersteuerung dargestellt.

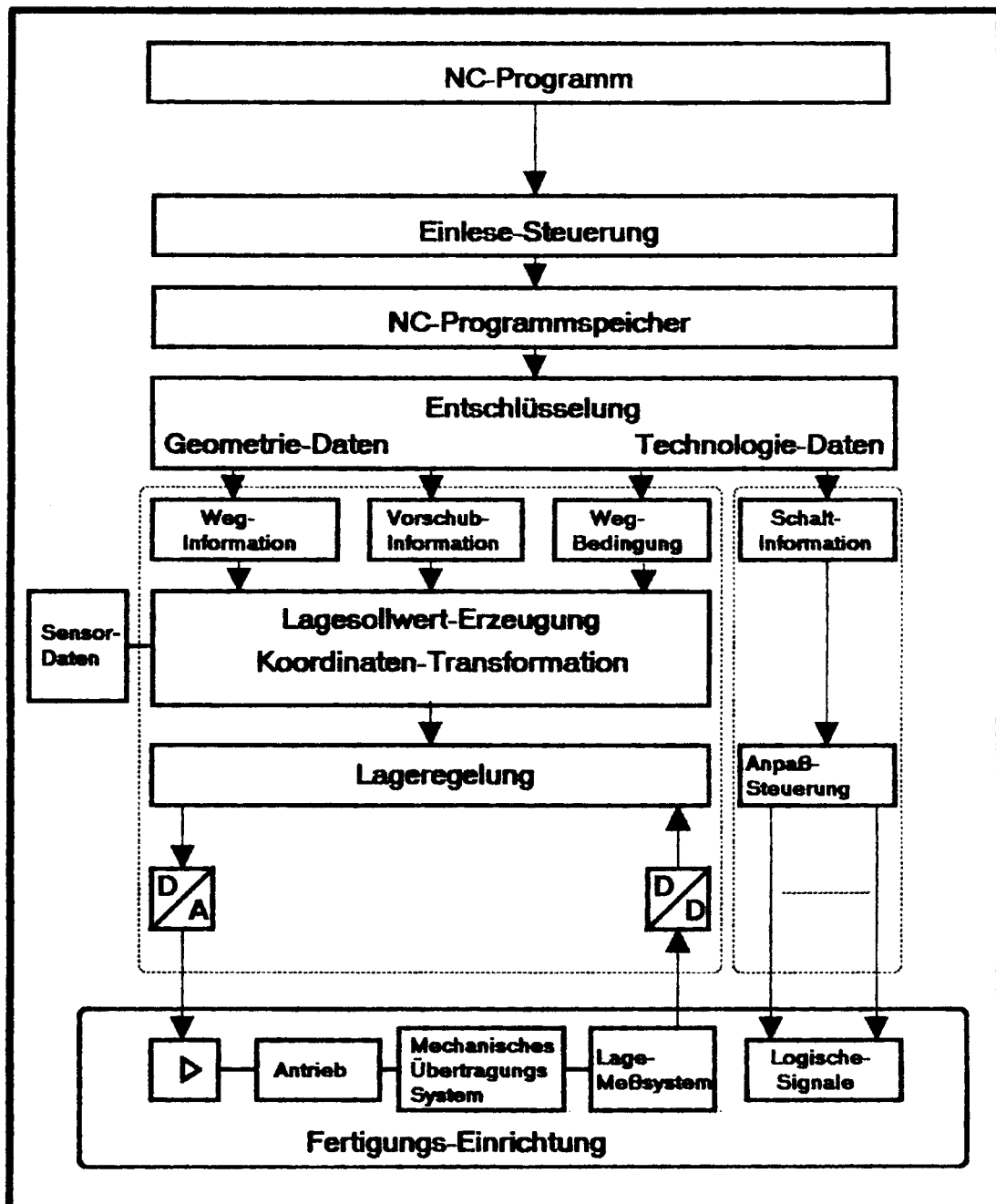


Bild 6.18: Roboter-Steuerung

6.4.6 Programmiersprache

Die Steuersprache für Handhabungsgeräte wird wie die NC-Sprache mittels eines Interpreters bearbeitet und verfügt über drei verschiedene Gruppen von Sprachmitteln:

- Ein- und Ausgabe-Anweisungen
- Verfahrenanweisungen
- Kontrollanweisungen

Mit Hilfe dieser Sprachelemente lassen sich komplexe Handhabungsaufgaben formulieren. Ein Programminterpret steuert mit diesen Anweisungen das Handhabungsgerät.

6.4.6.1 Eingabe- und Ausgabeanweisungen

Für die Ausgabe von Schaltfunktionen stehen frei programmierbare Signalleitungen zur Verfügung. Diese Leitungen können vom Steuerprogramm gesetzt oder zurückgesetzt werden. Jeder Leitung ist eine Adresse zugeordnet. Mit diesen Anweisungen werden unterschiedliche Schaltfunktionen realisiert:

- **interne Schaltfunktionen (z.B. Greiferansteuerung)**
- **externe Schaltfunktionen für Fertigungs- und Transporteinrichtungen**
- **synchronisierende Schaltfunktionen für Fertigungs- und Transporteinrichtungen**

Entsprechend zur Ausgabe sind auch Eingabeleitungen verfügbar, die über ihre Adresse abfragbar sind. Diese Signale werden als logische Variablen deklariert, die zu logischen Ausdrücken verknüpft und in bedingten Anweisungen ausgewertet werden. Die Eingabesignale können in drei Gruppen unterteilt werden:

- **interne Eingangssignale (Endschalter)**
- **externe Eingangssignale von Sensoren**
- **externe Eingangssignale zur Synchronisation von Handhabungsaktionen**

Die den Eingangsleitungen zugeordneten logischen Variablen können zu logischen Ausdrücken verknüpft werden. Im folgenden Bild sind die Ein- und Ausgabeanweisungen dargestellt:

Anweisung	Bedeutung
AS << Nummer >>	Ausgang setzen
AL << Nummer >>	Ausgang löschen
G0 << Nummer >>	Greifer öffnen
G1 << Nummer >>	Greifer schließen
E1 <<Nummer >>	Eingang auf Null abfragen
E0 << Nummer >>	Eingang auf Eins abfragen

[Bild 6.19](#): Eingabe- und Ausgabeanweisungen

6.4.6.2 Verfahrenanweisungen

Die Sprachelemente, die zur Steuerung der Bewegungsachsen benötigt werden sind in Bild 6.20 zusammengestellt. Die zu den Adressbuchstaben angegebenen Zahlen geben Koordinatenmaße an. Die Verfahreninformation kann relativ oder absolut, bezogen auf den Referenzpunkt des Handhabungssystems angegeben werden. Die Anweisungen ABS und REL kontrollieren die Umwandlung der Koordinatenmaße. Die Verfahrenanweisung ist mit der Koordinatenangabe identisch. Ein programmierter Überschleifwert gibt den Abstand vom Zielpunkt an, bei dem Einlesen und Ausführen des nächsten Satzes begonnen wird.

Anweisung	Bedeutung
A1 << Zahl >>	Bewegung Achse 1
A2 << Zahl >>	Bewegung Achse 2
A3 << Zahl >>	Bewegung Achse 3
A4 << Zahl >>	Bewegung Achse 4
A5 << Zahl >>	Bewegung Achse 5
A6 << Zahl >>	Bewegung Achse 6
ABS	Koordinatenangaben absolut
REL	Koordinatenangaben relativ
F <<Nummer >>	Geschwindigkeitsstufe
L	Linear-Interpolation
CY << P1, P2 <<	Zirkular-Interpolation
S << Zahl >>	Überschleifparameter

[Bild 6.20](#): Sprachelemente zur Steuerung der Bewegungsachsen

6.4.6.3 Kontrollanweisungen

Mit Kontrollanweisungen ([Bild 6.21](#)) wird der Ablauf der auszuführenden Bewegungsprogramme beeinflusst. Eine Verweilzeit kann mit einer **WAIT**-Anweisung programmiert werden. Mit einer Sprunganweisung wird die normalerweise sequentielle Abarbeitung der Programmieranweisungen unterbrochen und mit der Anweisung fortgeführt, die durch die Marke gekennzeichnet ist. Sollen Anweisungsfolgen mehrfach durchlaufen werden, so kann durch die Programmierung einer Schleifenanweisung Speicherplatz gespart werden. Die Zahl in der **DO**-Anweisung gibt die Anzahl der Durchläufe an; die Marke kennzeichnet den Wiederholungsbereich. Unterprogramme werden mit der **CALL**-Anweisung aufgerufen und mit der **RETURN**-Anweisung beendet. Die **ENTRY**-Definition wird zur Definition der Anfangsadresse des Unterprogramms benötigt. Unterprogrammaufrufe und Schleifenanweisungen können mehrfach geschachtelt werden. Die **END**-Anweisung zeigt das logische Ende eines Haupt- oder Unterprogramms an. Mit Hilfe der **IF**-Anweisung lässt sich der Programmablauf abhängig von externen logischen Funktionen oder von Sensorsignalen steuern. Die **IF**-Anweisung enthält einen logischen Ausdruck und eine Kontroll- oder Ausgabeanweisung. Wenn der logische Ausdruck "TRUE" ist, wird die Anweisung ausgeführt, im anderen Falle übersprungen. Mit der **IF**-Anweisung können verschiedene bedingte Anweisung zusammengesetzt werden. Die logischen IF-Abfragen erlauben die asynchrone Bedienung von mehreren Fertigungseinrichtungen.

Kontrollanweisung	
Anweisung	Bedeutung
WAIT << Zahl >>	Verweilzeit
STOP	Halt-Anweisung
GOTO << MARKE >>	Sprung-Anweisung
DO << MARKE >> << Zahl >>	Schleifenanweisung
<< MARKE >> CONTINUE	Schleifenende
CALL << NAME >>	Unterprogramm-Aufruf
ENTRY < <NAME >>	Unterprogramm-Anfang
RETURN	Unterprogramm-Rücksprung
END	Programmende
Bedingte Kontrollanweisung	
Anweisung	Bedeutung
IF << log. Ausdruck >> WAIT << Zahl >>	bedingte Verweilzeit
IF << log. Ausdruck >> STOP	bedingter Halt
IF << log. Ausdruck >> GOTO << MARKE >>	bedingter Sprung
IF << log. Ausdruck >> CALL << NAME >>	bedingter Unterprogramm-Aufruf
IF << log. Ausdruck >> RETURN	bedingter Unterprogramm-Rücksprung

[Bild 6.21](#): Kontrollanweisungen

6.4.7 Die Koordinatentransformation für Gelenkroboter

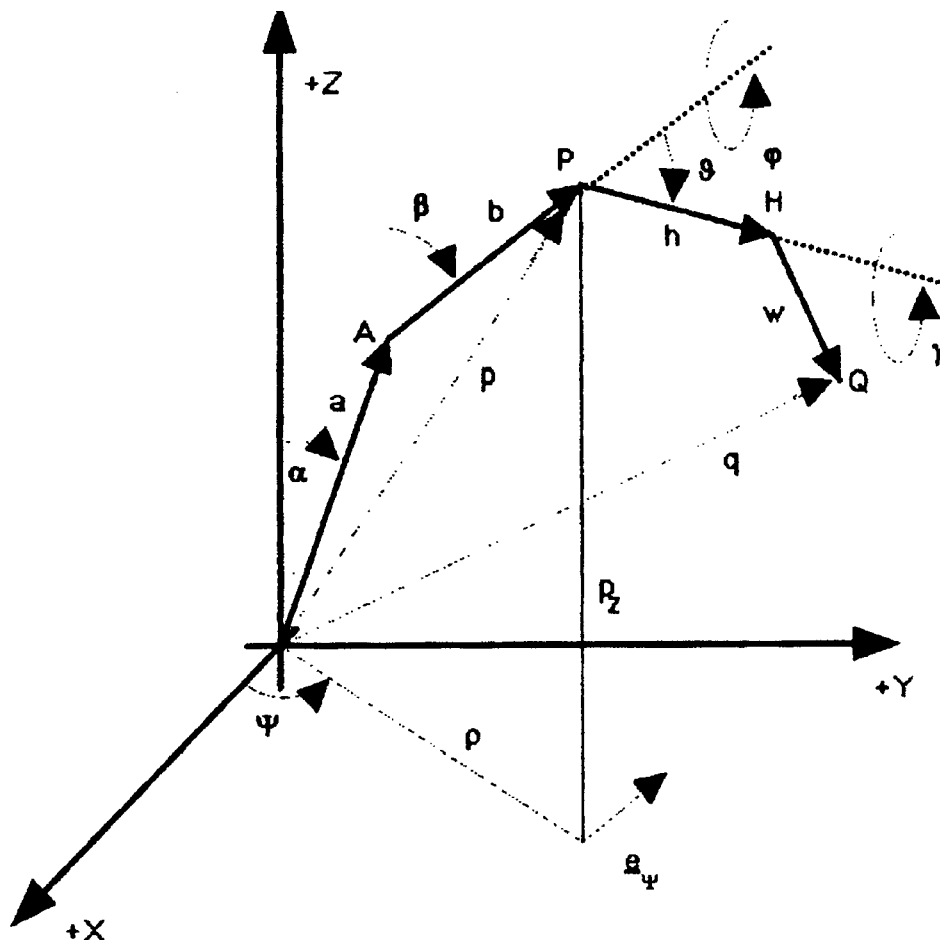
6.4.7.1 Allgemeines

Die Koordinatentransformation erfordert im Steuerungsrechner einen erheblichen Rechenzeitbedarf. Um die Algorithmen für die Koordinatentransformation möglichst einfach zu halten, wird die Berechnung mit Hilfe der Vektorrechnung durchgeführt. Man unterscheidet folgende Transformationen:

- **Vorwärtstransformation**
- **Rückwärtstransformation**

Die **Vorwärtstransformation** berechnet aus den Drehwinkeln der Antriebe die Position des Roboters und die Orientierung des Werkzeuges. Die **Rückwärtstransformation** berechnet aus der Position des Roboters und der Orientierung des Werkzeuges die Drehwinkel der Antriebe. Die Rückwärtstransformation ist nicht eindeutig bestimmt, hier können 8 verschiedene Fälle auftreten. Beide Transformationen müssen in einer Robotersteuerung implementiert sein.

Der betrachtete Gelenkroboter weist gemäß [Bild 6.22](#) die mit der z-Achse zusammenfallende Gestellachse auf, um die der **Gestellarm a** mit dem Winkel ψ drehbar gelagert ist und mit der er den Winkel α einschließt. An den Gestellarm schließt sich der **Arbeitsarm b** an, der mit der Gestellachse den Winkel β bildet. Das **Gelenk A** ist als Drehgelenk ausgeführt, so dass Gestellachse, Gestellarm und Arbeitsarm in einer Ebene liegen. Das **Kugelgelenk P** trägt den **Werkzeughalter h**, der mit der Achse des Arbeitsarmes den Winkel ϑ einschließt und um diese mit dem Winkel φ drehbar ist. Das **Werkzeug w** ist starr mit dem **Halter h** verbunden und kann um die Achse des Halters mit dem Winkel γ gedreht werden.



[Bild 6.22](#): Kinematische Darstellung des Gelenkroboters

Die Bahnsteuerungsaufgabe erfordert, dass das Werkzeugende Q gemäß [Bild 6.23](#) eine vorgegebene Bahnkurve von C nach D auf der Werkstückoberfläche mit vorgegebener Geschwindigkeit v durchfährt. Die Bahnkurve ist in Parameterdarstellung durch den Ortsvektor $\underline{q} = \underline{q}(\tau)$ gegeben, wodurch auch der **Bahnvektor** \underline{s} gegeben ist. Der **Normalenvektor** \underline{n} steht senkrecht zu \underline{s} und ist durch die Flächennormale der Werkstückoberfläche gegeben. Das **Werkzeug** \underline{w} liegt in der Ebene, die durch \underline{s} und \underline{n} gebildet wird und es schließt mit dem **Normalenvektor** \underline{n} in Bewegungsrichtung den Winkel σ ein. Der Halter ist mit dem Werkzeug über den Winkel δ starr verbunden. Das **Dreieck PHQ**, das aus dem Halter und dem Werkzeug gebildet wird, weist eine **Flächennormale** \underline{m} auf, die mit dem Vektor $\underline{s} \times \underline{n}$ den Winkel λ einschließt.

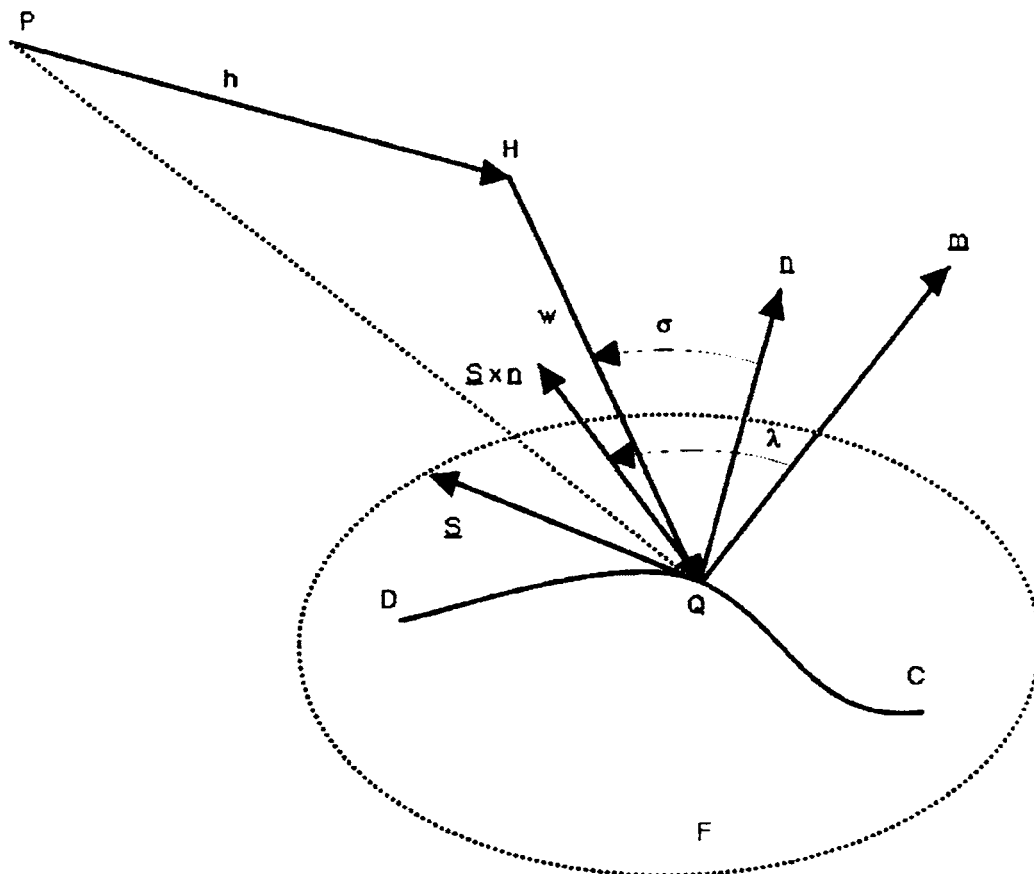


Bild 6.23: Bahnkurve und Orientierung des Halters

Aufgrund dieser Vorgaben liegt eine vorgegebene räumliche Bewegung des Dreiecks PHQ vor und zu berechnen sind die sechs Roboterwinkel (α , β , ψ , ϑ , φ , γ).

6.4.7.2 Die Rücktransformation

6.4.7.2.1 Berechnung der Stellung der Hand

Das Werkzeug liegt in einer Ebene, die aus den **Vektoren** \underline{s} und \underline{n} gebildet wird. Aus der folgenden Abbildung kann der **Vektor** \underline{w} ermittelt werden.

$$\underline{w} = -w (\underline{s} \cdot \sin(\sigma) + \underline{n} \cdot \cos(\sigma)) \quad (6.1)$$

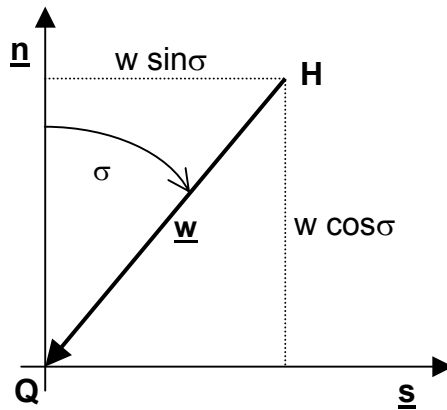


Bild 6.24: Lage des Werkzeuges

Zur Berechnung des Vektors \underline{h} werden die Komponenten von \underline{h} in die drei Richtungen \underline{n} , \underline{s} und $\underline{n} \times \underline{s}$ benötigt. Zunächst werden zwei Gleichungen zur Bestimmung der Komponenten von \underline{h} in \underline{n} und \underline{s} aufgestellt.

Im ersten Schritt wird die obige Gleichung mit dem Vektor \underline{h} skalar multipliziert. Man erhält:

$$\underline{h} \cdot \underline{w} = -\underline{h} \cdot w (\underline{s} \cdot \sin(\sigma) + \underline{n} \cdot \cos(\sigma)) = -w ((\underline{h} \cdot \underline{s}) \sin(\sigma) + (\underline{h} \cdot \underline{n}) \cos(\delta))$$

Das Skalarprodukt $\underline{h} \cdot \underline{w}$ kann aber auch aus folgendem Bild entnommen werden. Hierzu wird der Vektor w zum Punkt P parallel verschoben und mit dem eingeschlossenen Winkel $\pi - \delta$ wird das Skalarprodukt gebildet.

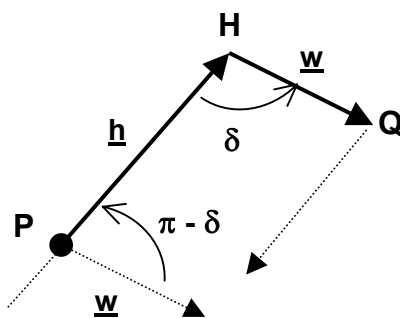


Bild 6.25: Halter und Werkzeug

$$\underline{h} \cdot \underline{w} = \underline{h} \cdot w \cos(\pi - \delta) = -\underline{h} \cdot w \cos(\delta)$$

Durch Gleichsetzen der beiden obigen Gleichungen ergibt sich:

$$(\underline{h} \cdot \underline{s})w \cdot \sin(\sigma) + (\underline{h} \cdot \underline{n})w \cdot \cos(\sigma) = \underline{h} \cdot w \cdot \cos(\delta) \quad (6.2)$$

Die Komponenten von \underline{h} in Richtung \underline{s} und \underline{n} sind die Unbekannten $\underline{h} \cdot \underline{s}$ und $\underline{h} \cdot \underline{n}$. Die zur Bestimmung der zwei Unbekannten erforderliche zweite Gleichung erhält man aus dem Skalarprodukt von $(\underline{h} \times \underline{w})$ und $(\underline{s} \times \underline{n})$.

$$(\underline{h} \times \underline{w}) \cdot (\underline{s} \times \underline{n}) = (\underline{h} \cdot \underline{s})(\underline{w} \cdot \underline{n}) - (\underline{w} \cdot \underline{s})(\underline{h} \cdot \underline{n})$$

Als Unbekannte treten wieder die Terme $\underline{h} \cdot \underline{s}$ und $\underline{h} \cdot \underline{n}$ auf. Die Terme $\underline{w} \cdot \underline{n}$ und $\underline{w} \cdot \underline{s}$ können mit Hilfe der [Gleichung 6.1](#) berechnet werden. Es gilt:

$$\underline{w} \cdot \underline{n} = -w \cdot \cos(\sigma) \quad \text{und} \quad \underline{w} \cdot \underline{s} = -w \cdot \sin(\sigma)$$

Setzt man die Ergebnisse für $\underline{w} \cdot \underline{n}$ und $\underline{w} \cdot \underline{s}$ in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$(\underline{h} \times \underline{w}) \cdot (\underline{s} \times \underline{n}) = -(\underline{h} \cdot \underline{s}) w \cdot \cos(\sigma) + (\underline{h} \cdot \underline{n}) w \cdot \sin(\sigma)$$

Das Skalarprodukt aus $(\underline{h} \times \underline{w})$ und $(\underline{s} \times \underline{n})$ kann aber auch aus der Definitionsgleichung des Skalarproduktes bestimmt werden:

$$(\underline{h} \times \underline{w}) \cdot (\underline{s} \times \underline{n}) = |(\underline{h} \times \underline{w})| \cdot |(\underline{s} \times \underline{n})| \cos(\lambda)$$

Der Winkel λ ist der Winkel zwischen den Vektoren $(\underline{h} \times \underline{w})$ und $(\underline{s} \times \underline{n})$. Es gilt:

$$|(\underline{s} \times \underline{n})| = 1$$

und

$$|(\underline{h} \times \underline{w})| = h \cdot w \cdot \sin(\pi - \delta) = h \cdot w \cdot \sin(\delta)$$

Damit erhält man die zweite Bestimmungsgleichung für die Komponenten des Vektors h in Richtung s und n ($\underline{h} \cdot \underline{s}$ und $\underline{h} \cdot \underline{n}$).

$$(\underline{h} \times \underline{w}) \cdot (\underline{s} \times \underline{n}) = h \cdot w \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) = -(\underline{h} \cdot \underline{s}) w \cdot \cos(\sigma) + (\underline{h} \cdot \underline{n}) w \cdot \sin(\sigma)$$

$$-(\underline{h} \cdot \underline{s}) w \cdot \cos(\sigma) + (\underline{h} \cdot \underline{n}) w \cdot \sin(\sigma) = h \cdot w \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \quad (6.3)$$

Die beiden [Gleichungen 6.2](#) und [6.3](#) stellen ein linear unabhängiges Gleichungssystem für die zwei Unbekannten $\underline{h} \cdot \underline{s}$ und $\underline{h} \cdot \underline{n}$ dar. Hiermit können also die Komponenten von \underline{h} in Richtung der Bahn (\underline{s} – Richtung) und in Richtung der Normalen (\underline{n} – Richtung) berechnet werden.

Setzt man für $\underline{x} = \underline{h} \cdot \underline{s}$ und für $\underline{y} = \underline{h} \cdot \underline{n}$, so erhält man nach der Division durch w aus [Gleichung 6.2](#) und [Gleichung 6.3](#)

$$\underline{x} \cdot \sin(\sigma) + \underline{y} \cdot \cos(\sigma) = h \cdot \cos(\delta) \quad (6.4)$$

$$-\underline{x} \cdot \cos(\sigma) + \underline{y} \cdot \sin(\sigma) = h \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda)$$

Multipliziert man die 1. Gleichung mit $\sin(\sigma)$ und die 2. Gleichung mit $\cos(\sigma)$, so erhält man nach der Subtraktion beider Gleichungen für \underline{x}

$$\underline{x} \cdot (\sin^2(\sigma) + \cos^2(\sigma)) = h \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\sigma) - h \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\sigma) \cdot \cos(\lambda)$$

$$\underline{x} = h \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\sigma) - h \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\sigma) \cdot \cos(\lambda)$$

In gleicher Weise wird y ermittelt. Hierzu wird die 1. Gleichung mit $\cos(\sigma)$ und die 2. Gleichung mit $\sin(\sigma)$ multipliziert. Nach der Addition beider Gleichungen erhält man für y

$$y = h \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(\sigma) + h \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\sigma)$$

Für $x = \underline{h} \cdot \underline{s}$ und $y = \underline{h} \cdot \underline{n}$ erhält man somit die folgende Lösung:

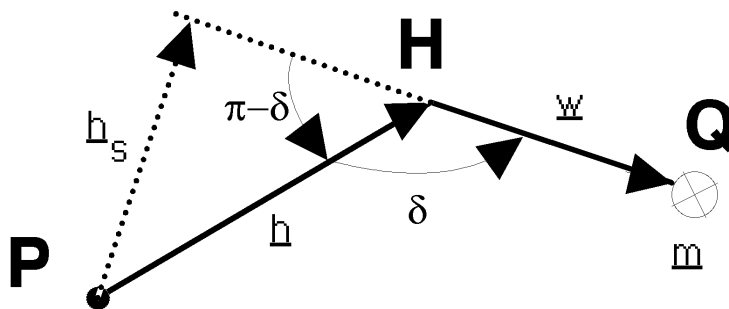
$$\begin{aligned} \underline{h} \cdot \underline{s} &= h \cdot (\cos(\delta) \cdot \sin(\sigma) - \sin(\delta) \cdot \cos(\sigma) \cdot \cos(\lambda)) \\ \underline{h} \cdot \underline{n} &= h \cdot (\cos(\delta) \cdot \cos(\sigma) + \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Von dem Vektor \underline{h} muss jetzt noch die dritte Komponente, die in Richtung von $\underline{n} \times \underline{s}$ zeigt, berechnet werden. Zur Berechnung der Projektion des Vektors \underline{h} auf den Vektor $\underline{n} \times \underline{s}$ wird aus dem folgenden Bild zunächst die Komponente \underline{h}_s des Vektors \underline{h} ermittelt, die senkrecht auf dem Vektor \underline{w} steht.

Da der Vektors \underline{m}

$$\underline{m} = \frac{\underline{h} \times \underline{w}}{|\underline{h} \times \underline{w}|} \quad (6.6)$$

die Flächennormale des Dreiecks $\underline{P} \underline{H} \underline{Q}$ darstellt, steht die Komponente \underline{h}_s auch senkrecht auf dem Vektor \underline{m} .



[Bild 6.26](#): Berechnung der Komponente \underline{h}_s des Vektors \underline{h} senkrecht zu \underline{w} und \underline{m}

$$h_s = h \cdot \sin(\pi - \delta) = h \cdot \sin(\delta)$$

Die Komponente \underline{h}_s wird nun zum Punkt Q parallel verschoben und so um \underline{m} gedreht, dass sie in der Ebene liegt, die durch den Vektor \underline{m} und $\underline{s} \times \underline{n}$ aufgespannt wird. Zwischen den Vektoren \underline{m} und $\underline{s} \times \underline{n}$ liegt der Winkel λ . Dies ist im folgenden Bild dargestellt.

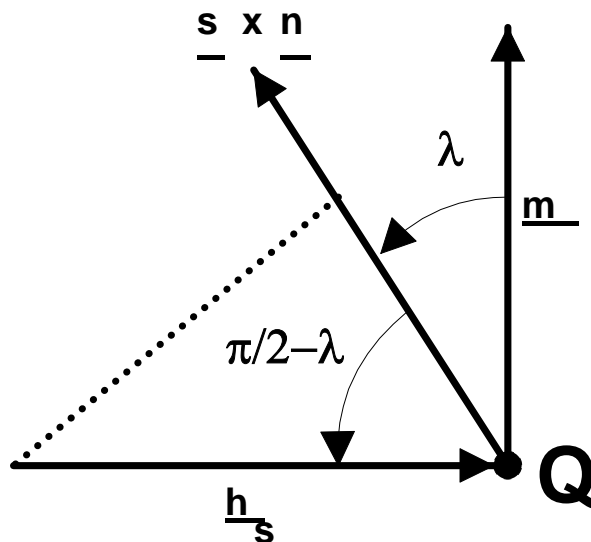


Bild 6.27: Projektion des Vektors \underline{h}_s auf den Vektor $\underline{s} \times \underline{n}$

Die Projektion des Vektors \underline{h}_s auf den Vektor $\underline{s} \times \underline{n}$ ergibt sich mit

$$\underline{h}_s(\underline{n} \times \underline{s}) = -h \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\lambda)$$

Damit wurde die Projektion von \underline{h} auf $\underline{s} \times \underline{n}$ in zwei Schritten dargestellt. Als Ergebnis erhält man wegen $\underline{s} \times \underline{n} = -\underline{n} \times \underline{s}$

$$\underline{h}(\underline{n} \times \underline{s}) = h \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \quad (6.8)$$

Der Vektor \underline{h} ergibt sich aus den [Gleichungen 6.5](#) und [6.8](#) mit

$$\begin{aligned} \underline{h} = & \underline{s} \cdot h(\cos(\delta) \cdot \sin(\sigma) - \sin(\delta) \cdot \cos(\sigma) \cdot \cos(\lambda)) + \\ & \underline{n} \cdot h(\cos(\delta) \cdot \cos(\sigma) + \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\sigma)) + \\ & (\underline{n} \times \underline{s}) \cdot h \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Damit sind die Vektoren \underline{w} ([Gleichung 6.1](#)) und \underline{h} ([Gleichung 6.9](#)) bekannt. Da der Vektor \underline{q} mit dem Bahnpunkt Q vorgegeben ist, kann auch der Ortsvektor \underline{p} des Kugelgelenkes P als

$$\underline{p} = \underline{q} - \underline{w} - \underline{h} \quad (6.10)$$

berechnet werden. Auch der Vektor \underline{m} , der den Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen des Dreiecks PHQ darstellt, kann jetzt berechnet werden. Für die Berechnung von \underline{m} bildet man mit $|\underline{h} \times \underline{w}|$ und $\underline{h} \times \underline{w}$:

$$\underline{m} = \frac{\underline{h} \times \underline{w}}{|\underline{h} \times \underline{w}|}$$

$$|\underline{h} \times \underline{w}| = |\underline{h}| \cdot |\underline{w}| \cdot \sin(\delta) = h \cdot w \cdot \sin(\delta)$$

Die Vektoren \underline{w} und \underline{h} wurden bereits in den [Gleichungen 6.1](#) und [6.9](#) berechnet.

$$\underline{h} = \underline{s} \cdot h (\cos(\delta) \cdot \sin(\sigma) - \sin(\delta) \cdot \cos(\sigma) \cdot \cos(\lambda)) + \\ \underline{n} \cdot h (\cos(\delta) \cdot \cos(\sigma) + \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\sigma)) + \\ (\underline{n} \times \underline{s}) \cdot h \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\lambda)$$

$$\underline{w} = -w (\underline{s} \cdot \sin(\sigma) + \underline{n} \cdot \cos(\sigma))$$

Für $\underline{h} \times \underline{w}$ erhält man:

$$\underline{h} \times \underline{w} = h \cdot w ((\underline{s} \times (-\underline{n})) (\cos(\delta) \cdot \sin(\sigma) - \sin(\delta) \cdot \cos(\sigma) \cdot \cos(\lambda)) \cdot \cos(\sigma) + \\ (\underline{n} \times (-\underline{s})) (\cos(\delta) \cdot \cos(\sigma) + \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\sigma)) \cdot \sin(\sigma) + \\ ((\underline{n} \times \underline{s}) \times (-\underline{s})) (\sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \cdot \sin(\sigma) + \\ ((\underline{n} \times \underline{s}) \times (-\underline{n})) (\sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \cdot \cos(\sigma)))$$

Mit

$$\underline{s} \times \underline{s} = 0 \\ (\underline{n} \times \underline{s}) \times (\underline{n}) = \underline{s} \\ (\underline{n} \times \underline{s}) \times (\underline{s}) = -\underline{n}$$

erhält man:

$$\underline{h} \times \underline{w} = h \cdot w ((\underline{n} \times \underline{s}) (\cos(\delta) \cdot \sin(\sigma) \cdot \cos(\sigma) - \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos^2(\sigma)) + \\ (\underline{n} \times \underline{s}) (-\cos(\delta) \cdot \cos(\sigma) \cdot \sin(\sigma) - \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin^2(\sigma)) + \\ (\underline{n}) (\sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \cdot \sin(\sigma) + \\ (\underline{s}) (-\sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \cdot \cos(\sigma)))$$

$$\underline{h} \times \underline{w} = h \cdot w ((\underline{n} \times \underline{s}) (-\sin(\delta) \cdot \cos(\lambda)) + \\ (\underline{n}) (\sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \cdot \sin(\sigma) + \\ (\underline{s}) (-\sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \cdot \cos(\sigma)))$$

Für den Vektor erhält man

$$\underline{m} = \frac{\underline{h} \times \underline{w}}{|\underline{h} \times \underline{w}|} = (\underline{n} \cdot \sin(\sigma) - \underline{s} \cdot \cos(\sigma)) \cdot \sin(\lambda) - (\underline{n} \times \underline{s}) \cdot \cos(\lambda) \quad (6.11)$$

Nachdem die Vektoren \underline{p} , \underline{h} , \underline{w} und \underline{m} bekannt sind, kann die Berechnung der Achswinkel (α , β , ψ , ϑ , φ , γ) der sechs Antriebe des Roboters erfolgen.

6.4.7.2.2 Berechnung der Drehwinkel der Hauptachsen

Die Drehwinkel der Hauptachsen des Roboters (α , β , ψ) können mit Hilfe des Vektors \underline{p} , der in [Gleichung 6.10](#) angegeben wurde, berechnet werden. Im folgenden Bild ist das Dreieck **OAP**

dargestellt. Die Roboterarme **a** und **b** können jeden Punkt **P** mit zwei verschiedenen Winkelstellungen erreichen.

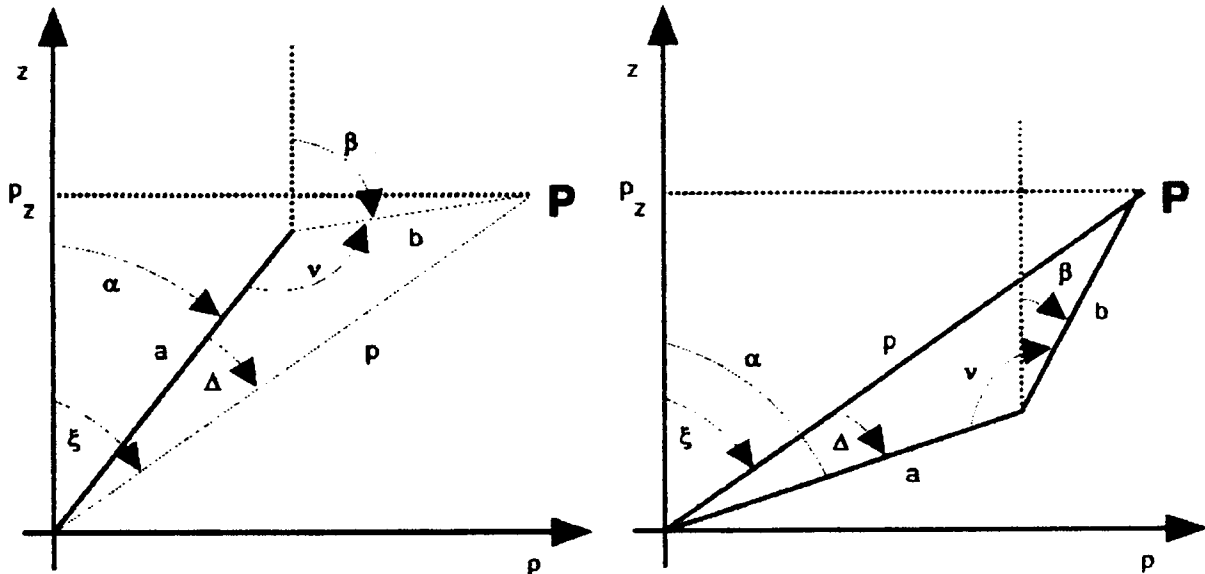


Bild 6.28: Berechnung der Winkel α und β

Die im Bild dargestellten Winkel berechnen sich mit

$$\begin{aligned}\xi &= \arccos\left(\frac{p_z}{p}\right) \\ \Delta &= \arccos\left(\frac{-b^2 + a^2 + p^2}{2 \cdot a \cdot p}\right) \\ v &= \arccos\left(\frac{-p^2 + a^2 + b^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)\end{aligned}\quad (6.12)$$

wobei bei der Berechnung von v und Δ der Kosinussatz verwendet wird. Die Winkel α und β erhält man damit für die im Bild dargestellten zwei Fälle mit

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \xi - \Delta \\ \beta_1 &= \alpha_1 + \pi - v \\ \alpha_2 &= \xi + \Delta \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \pi + v\end{aligned}\quad (6.13)$$

Aus dem [Bild 6.22](#) kann die Berechnung von ψ entnommen werden.

$$\psi = \arccos\left(\frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) \cdot \text{sign}(p_y)\quad (6.14)$$

Besonders zu beachten ist hierbei das Vorzeichen des Winkels ψ , das durch die Richtung der y -Komponente des Ortsvektors p gegeben ist. Der Ortsvektor p ist dabei mit

$$\underline{p} = \underline{e}_x \cdot \underline{p}_x + \underline{e}_y \cdot \underline{p}_y + \underline{e}_z \cdot \underline{p}_z\quad (6.15)$$

gegeben.

Damit wurden die drei Winkel α , β , ψ der Hauptachsen des Gelenkroboters berechnet.

6.4.7.2.3 Berechnung der Drehwinkel der Handachsen

Im Folgenden werden die Drehwinkel der drei Handachsen ϑ , φ , γ berechnet. Hierzu müssen zunächst die Vektoren \underline{a} und \underline{b} , die die Stellung des Ober- und Unterarmes darstellen, berechnet werden. Die Winkel α und ψ bilden mit dem Vektor ein Kugelkoordinatensystem. Der Vektor ergibt sich somit zu:

$$\underline{a} = (\underline{e}_x \cdot \cos(\psi) + \underline{e}_y \cdot \sin(\psi)) \cdot a \cdot \sin(\alpha) + \underline{e}_z \cdot a \cdot \cos(\alpha) \quad (6.16)$$

Der Vektor \underline{b} ergibt sich aus der Differenz der Vektoren \underline{p} und \underline{a} .

$$\underline{b} = \underline{p} - \underline{a} \quad (6.17)$$

Die Berechnung des Winkels ϑ wird mittels des Skalarproduktes der Vektoren \underline{b} und \underline{h} durchgeführt, die den gesuchten Winkel ϑ einschließen. Dies ist in Bild 6.22 zu sehen.

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\underline{h} \cdot \underline{b}}{h \cdot b}\right) \quad (6.18)$$

Das Vorzeichen des Winkels ϑ kann negativ oder positiv sein. Jeder Punkt \mathbf{H} ist mit negativem oder positivem ϑ erreichbar. Hierzu muss der Winkel φ entsprechend um π gedreht werden. Man erhält also die beiden Lösungen für ϑ mit:

$$\begin{aligned} \vartheta_A &= \vartheta \\ \vartheta_B &= -\vartheta \end{aligned} \quad (6.19)$$

Zur Berechnung des Skalarproduktes $\underline{h} \cdot \underline{b}$ sei an die Bildung des Skalarproduktes zweier beliebiger Vektoren \underline{a} und \underline{b} erinnert:

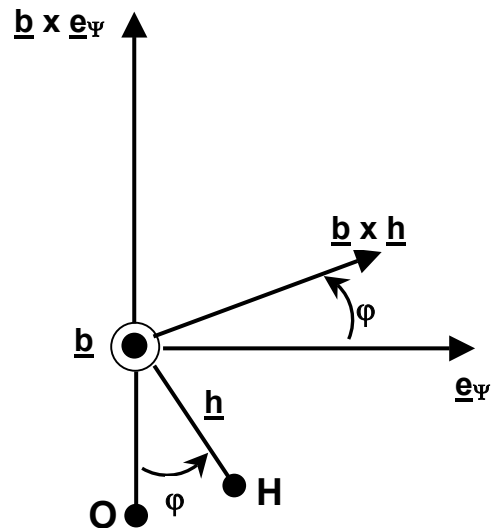
$\underline{a} = \underline{e}_x \cdot a_x + \underline{e}_y \cdot a_y + \underline{e}_z \cdot a_z$	$\underline{b} = \underline{e}_x \cdot b_x + \underline{e}_y \cdot b_y + \underline{e}_z \cdot b_z$	(6.20)
$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$		

Der Betrag des Skalarproduktes ist mit

$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\Phi) \quad (6.21)$$

gegeben. Hierbei ist Φ der Winkel zwischen den Vektoren \underline{a} und \underline{b} .

Die Berechnung der Winkel φ und γ gestaltet sich etwas schwieriger. Zunächst wird der Winkel φ berechnet. Hierzu betrachtet man wieder [Bild 6.22](#). Die beiden Dreiecke **OAP** und **APH** bewegen sich an dem gemeinsamen Arbeitsarm \underline{b} um den Winkel φ . Wenn φ geändert wird, dann dreht sich das Dreieck **APH** um den Arbeitsarm \underline{b} , während das Dreieck **OAP** feststeht. Diese Situation wird deutlich, wenn man die Ebene senkrecht zum Arbeitsarm \underline{b} mit der Ebenengleichung $(\underline{p} - \underline{r}) \cdot \underline{b} = 0$ betrachtet. In der Blickrichtung entgegengesetzt von \underline{b} ergibt sich das folgende Bild.

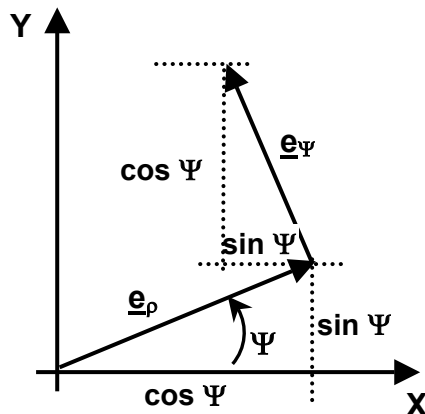


[Bild 6.29](#): Darstellung der Ebene $(\underline{p} - \underline{r}) \cdot \underline{b} = 0$ mit Blick auf $-\underline{b}$

Der Punkt **H** ist der Endpunkt des Halters und der Punkt **O** ist der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems in [Bild 6.22](#). Hier ist ersichtlich, dass der Winkel φ auch zwischen den Vektoren \underline{e}_ψ und $\underline{b} \times \underline{h}$ auftritt.

Der Vektor \underline{e}_ψ kann aus folgendem Bild, das die **X-Y**-Ebene des [Bildes 6.22](#) darstellt, entnommen werden.

$$\underline{e}_\psi = -\underline{e}_x \cdot \sin(\psi) + \underline{e}_y \cdot \cos(\psi) \quad (6.22)$$



[Bild 6.30](#): Darstellung des Vektors \underline{e}_ψ

Der Einheitsvektor \underline{e}_ρ ist der Vektor in Richtung von ρ in [Bild 6.22](#) mit dem Betrag 1. Der Vektor \underline{e}_ψ steht senkrecht auf \underline{e}_ρ in Richtung von $\frac{d\underline{e}_\rho}{d\psi}$.

Der Winkel ergibt sich mit

$$\varphi = \text{sign}(\varphi) \cdot \arccos \left(\underline{e}_\psi \cdot \frac{\underline{b} \times \underline{h}}{|\underline{b} \times \underline{h}|} \right) \quad (6.23)$$

Das Vorzeichen des Winkels φ muss noch berechnet werden. Man erhält es aus [Bild 6.30](#) mit:

$$\text{sign}(\varphi) = \text{sign}((\underline{b} \times \underline{e}_\psi) \cdot (\underline{b} \times \underline{h})) \quad (6.24)$$

Diese Gleichung muss im Hinblick auf das zu erstellende Echtzeitprogramm der Robotersteuerung mit vektoralgebraischen Umformungen vereinfacht werden.

Man erhält mit der allgemeinen Umformung

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \cdot (\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d}) \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) \quad (6.25)$$

für die obige Gleichung

$$(\underline{b} \times \underline{e}_\psi) \cdot (\underline{b} \times \underline{h}) = (\underline{b} \cdot \underline{b}) \cdot (\underline{e}_\psi \cdot \underline{h}) - (\underline{b} \cdot \underline{h}) \cdot (\underline{e}_\psi \cdot \underline{b}) = b^2 \cdot \underline{e}_\psi \cdot \underline{h}$$

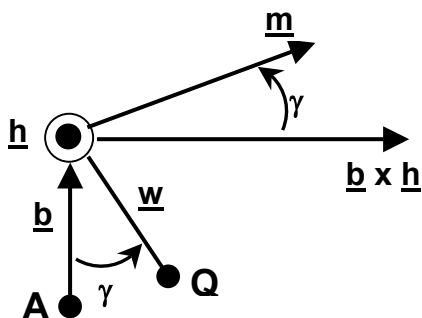
Für $\text{sign}(\varphi)$ ergibt sich damit, weil $b^2 > 0$ ist,

$$\text{sign}(\varphi) = \text{sign}(\underline{e}_\psi \cdot \underline{h}) \quad (6.26)$$

Diese Lösung erhält man, wenn Winkel $\vartheta \geq 0$ ist. Wenn jedoch $\vartheta < 0$ wird, dann muss der Winkel φ um π gedreht werden, um den gleichen Punkt **H** zu erreichen. Damit erhält man für den Winkel φ zwei Lösungen.

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi && , \text{ für } \vartheta \geq 0 \\ \varphi_B &= \varphi + \pi && , \text{ für } \vartheta < 0 \text{ und } \varphi_1 < 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Der letzte Winkel, der für die Rücktransformation berechnet werden muss, ist der Winkel γ . Hierzu betrachtet man wieder [Bild 6.22](#). Die beiden Dreiecke **PHQ** und **APH** bewegen sich an dem gemeinsamen Halter **h** um den Winkel γ . Wenn γ geändert wird, dann dreht sich das Dreieck **PHQ** um den Halter **h**, während das Dreieck **APH** feststeht. Diese Situation wird deutlich, wenn man die Ebene senkrecht zum Halter **h** mit der Ebenengleichung $(\underline{p} - \underline{r}) \cdot \underline{b} = 0$ betrachtet. In der Blickrichtung entgegengesetzt von **h** ergibt sich das folgende Bild.



[Bild 6.29](#): Darstellung der Ebene $(\underline{p} - \underline{r}) \cdot \underline{h} = 0$ mit Blick auf $-\underline{h}$

Der Punkt **A** ist der Anfang des Vektors **b** und der Punkt **Q** ist der Bahnpunkt am Ende des Werkzeugvektors **w**.

Der gesuchte Winkel γ wird vom Vektor **b** und dem Werkzeug und auch von dem Vektor **m** und dem Vektor **b x h** eingeschlossen. Der Winkel γ ergibt sich dann mit

$$\gamma = \text{sign}(\gamma) \cdot \arccos\left(\frac{\underline{m} \cdot \frac{\underline{b} \times \underline{h}}{|\underline{b} \times \underline{h}|}}{|\underline{m}|}\right) \quad (6.28)$$

Das Vorzeichen des Winkels γ muss noch berechnet werden. Man erhält es aus [Bild 6.31](#) mit:

$$\text{sign}(\gamma) = \text{sign}\left(\left(\underline{m} \times \underline{h}\right) \cdot \left(\underline{b} \times \underline{h}\right)\right) \quad (6.29)$$

Auch diese Gleichung kann wieder vektoralgebraisch umgeformt werden.

$$\left(\underline{m} \times \underline{h}\right) \cdot \left(\underline{b} \times \underline{h}\right) = \left(\underline{m} \cdot \underline{b}\right) \cdot \left(\underline{h} \cdot \underline{h}\right) - \left(\underline{m} \cdot \underline{h}\right) \cdot \left(\underline{h} \cdot \underline{b}\right) = h^2 \cdot \underline{m} \cdot \underline{h}$$

Für $\text{sign}(\gamma)$ ergibt sich damit, weil $h^2 > 0$ ist,

$$\text{sign}(\gamma) = \text{sign}\left(\underline{m} \cdot \underline{b}\right) \quad (6.30)$$

6.4.7.2.3 Alle acht Lösungen der Rücktransformation

In diesem Kapitel wird der Lösungsweg für die Rücktransformation zusammengefasst. Dabei werden alle acht Lösungen, die sich durch die Vieldeutigkeit der Gelenkkinematik ergeben, dargestellt. Da die Formeln bereits hergeleitet wurden, wird keine neue Numerierung durchgeführt.

Zunächst wird die Beschreibung der Bahn mit den Vektoren \underline{s} (Bahnvektor) und \underline{n} (Normalvektor) festgelegt. Die Winkel δ , σ und λ legen die Stellung von Werkzeug und Halter zur Bahn fest.

Dann kann der Vektor \underline{w} (Werkzeugvektor) und \underline{h} (Haltervektor) berechnet werden.

$$\underline{w} = -w \left(\underline{s} \cdot \sin(\sigma) + \underline{n} \cdot \cos(\sigma) \right) \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \underline{h} = & \underline{s} \cdot h \left(\cos(\delta) \cdot \sin(\sigma) - \sin(\delta) \cdot \cos(\sigma) \cdot \cos(\lambda) \right) + \\ & \underline{n} \cdot h \left(\cos(\delta) \cdot \cos(\sigma) + \sin(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\sigma) \right) + \\ & \left(\underline{n} \times \underline{s} \right) \cdot h \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Der Vektor \underline{p} zum Punkt \mathbf{P} ist damit eindeutig festgelegt.

$$\underline{p} = \underline{q} - \underline{w} - \underline{h} \quad (6.10)$$

Für die Berechnung der Rücktransformation wird auch der Vektor \underline{m} benötigt.

$$\underline{m} = \frac{\underline{h} \times \underline{w}}{|\underline{h} \times \underline{w}|} = \left(\underline{n} \cdot \sin(\sigma) - \underline{s} \cdot \cos(\sigma) \right) \cdot \sin(\lambda) - \left(\underline{n} \times \underline{s} \right) \cdot \cos(\lambda) \quad (6.11)$$

Für die Gestellwinkel α und β wurden in der [Gleichung 6.13](#) zwei Lösungen α_1, β_1 und α_2, β_2 gefunden, die auf zwei verschiedene Stellungen der Hauptachsen des Roboters führen.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \xi - \Delta \\
 \beta_1 &= \alpha_1 + \pi - \nu \\
 \hline
 \alpha_2 &= \xi + \Delta \\
 \beta_2 &= \alpha_2 - \pi + \nu
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \xi &= \arccos\left(\frac{p_z}{p}\right) \\
 \Delta &= \arccos\left(\frac{-b^2 + a^2 + p^2}{2 \cdot a \cdot p}\right) \\
 \nu &= \arccos\left(\frac{-p^2 + a^2 + b^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

Für diese zwei Lösungen wird der zugehörige Winkel ϑ berechnet. Hierzu werden zunächst die Vektoren \underline{a} und \underline{b} für beide Stellungen berechnet.

$$\underline{a}_1 = (\underline{e}_x \cdot \cos(\psi_1) + \underline{e}_y \cdot \sin(\psi_1)) \cdot a \cdot \sin(\alpha_1) + \underline{e}_z \cdot a \cdot \cos(\alpha_1)
 \tag{6.16}$$

$$\underline{a}_2 = (\underline{e}_x \cdot \cos(\psi_1) + \underline{e}_y \cdot \sin(\psi_1)) \cdot a \cdot \sin(\alpha_2) + \underline{e}_z \cdot a \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$\underline{b}_1 = \underline{p} - \underline{a}_1
 \tag{6.17}$$

$$\underline{b}_2 = \underline{p} - \underline{a}_2$$

mit

$$\psi_1 = \arccos\left(\frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) \cdot \text{sign}(p_y)$$

Die Winkel ϑ für beide Stellungen der Hauptachsen erhält man dann mit

$$\vartheta_1 = \arccos\left(\frac{\underline{h} \cdot \underline{b}_1}{\underline{h} \cdot \underline{b}}\right)
 \tag{6.18}$$

$$\vartheta_2 = \arccos\left(\frac{\underline{h} \cdot \underline{b}_2}{\underline{h} \cdot \underline{b}}\right)$$

Betrachtet man [Bild 6.22](#), so sieht man, dass zwei weitere Lösungen existieren. Diese erhält man, wenn man die Gestellarme \underline{a} und \underline{b} um die Winkel $-\alpha_1$, $-\beta_1$ oder $-\alpha_2$, $-\beta_2$ nach hinten neigt und dann den Winkel ψ um π dreht. Damit erhalten wir vier Lösungen der Koordinatentransformation.

ψ	α	β	ϑ
ψ_1	α_1	β_1	ϑ_1
ψ_1	α_2	β_2	ϑ_2
ψ_2	$-\alpha_1$	$-\beta_1$	ϑ_1
ψ_2	$-\alpha_2$	$-\beta_2$	ϑ_2

ψ_2 ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$\psi_2 = \begin{cases} \psi_1 + \pi & \text{für } \psi \leq 0 \\ \psi_1 - \pi & \text{für } \psi > 0 \end{cases}$$

In [Gleichung 6.18](#) wurde gezeigt, dass zwei Lösungen für ϑ existieren. Mit den Lösungen für ϑ und $-\vartheta$ erhält man dann die acht Lösungen der Rücktransformation vollständig. Diese sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Fall	ψ	α	β	ϑ	φ	γ
1	ψ_1	α_1	β_1	ϑ_1	φ_1	γ_1
2	ψ_1	α_2	β_2	ϑ_2	φ_2	γ_2
3	ψ_1	α_1	β_1	$-\vartheta_1$	φ_3	γ_3
4	ψ_1	α_2	β_2	$-\vartheta_2$	φ_4	γ_4
5	ψ_2	$-\alpha_1$	$-\beta_1$	$-\vartheta_1$	φ_1	γ_5
6	ψ_2	$-\alpha_2$	$-\beta_2$	$-\vartheta_2$	φ_2	γ_6
7	ψ_2	$-\alpha_1$	$-\beta_1$	ϑ_1	φ_3	γ_7
8	ψ_2	$-\alpha_2$	$-\beta_2$	ϑ_2	φ_4	γ_8

[Tabelle 6.1](#): Alle acht Lösungen der Rückwärtstransformation

In der obigen Tabelle müssen noch die Winkel φ und γ angegeben werden.

Um den Winkel φ zu berechnen, wird der Vektor \underline{e}_ψ benötigt.

$$\underline{e}_\psi = -\underline{e}_x \cdot \sin(\psi_1) + \underline{e}_y \cdot \cos(\psi_1) \quad (6.22)$$

Man erhält dann für φ_1 und φ_2

$$\varphi_1 = \text{sign}(\varphi) \cdot \arccos \left(\underline{e}_\psi \cdot \frac{\underline{b}_1 \times \underline{h}}{|\underline{b}_1 \times \underline{h}|} \right) \quad (6.23)$$

$$\varphi_2 = \text{sign}(\varphi) \cdot \arccos \left(\underline{e}_\psi \cdot \frac{\underline{b}_2 \times \underline{h}}{|\underline{b}_2 \times \underline{h}|} \right)$$

mit $\text{sign}(\varphi) = \text{sign}(\underline{e}_\psi \cdot \underline{h}) \quad (6.26)$

Für φ_3 und φ_4 ergibt sich

$$\varphi_3 = \begin{cases} \varphi_1 - \pi & \text{für } \varphi_1 \geq 0 \\ \varphi_1 + \pi & \text{für } \varphi_1 < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_4 = \begin{cases} \varphi_2 - \pi & \text{für } \varphi_2 \geq 0 \\ \varphi_2 + \pi & \text{für } \varphi_2 < 0 \end{cases}$$

Die Winkel γ berechnen sich wie folgt:

$$\gamma_1 = \text{sign}(\gamma_1) \cdot \arccos \left(\frac{\underline{m} \cdot \frac{\underline{b}_1 \times \underline{h}}{|\underline{b}_1 \times \underline{h}|}}{|\underline{b}_1 \times \underline{h}|} \right) \quad (6.28)$$

$$\gamma_2 = \text{sign}(\gamma_2) \cdot \arccos \left(\frac{\underline{m} \cdot \frac{\underline{b}_2 \times \underline{h}}{|\underline{b}_2 \times \underline{h}|}}{|\underline{b}_2 \times \underline{h}|} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{sign}(\gamma_1) &= \text{sign}(\underline{m} \cdot \underline{b}_1) \\ \text{sign}(\gamma_2) &= \text{sign}(\underline{m} \cdot \underline{b}_2) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Für γ_3 und γ_4 ergibt sich

$$\gamma_3 = \begin{cases} \gamma_1 - \pi & \text{für } \gamma_1 \geq 0 \\ \gamma_1 + \pi & \text{für } \gamma_1 < 0 \end{cases}$$

$$\gamma_4 = \begin{cases} \gamma_2 - \pi & \text{für } \gamma_2 \geq 0 \\ \gamma_2 + \pi & \text{für } \gamma_2 < 0 \end{cases}$$

Die Winkel γ_5 bis γ_8 erhält man aus der Drehung der Winkel γ_1 bis γ_4 um π .

$$\gamma_5 = \begin{cases} \gamma_1 - \pi & \text{für } \gamma_1 \geq 0 \\ \gamma_1 + \pi & \text{für } \gamma_1 < 0 \end{cases} \quad \gamma_6 = \begin{cases} \gamma_2 - \pi & \text{für } \gamma_2 \geq 0 \\ \gamma_2 + \pi & \text{für } \gamma_2 < 0 \end{cases}$$

$$\gamma_7 = \begin{cases} \gamma_3 - \pi & \text{für } \gamma_3 \geq 0 \\ \gamma_3 + \pi & \text{für } \gamma_3 < 0 \end{cases} \quad \gamma_8 = \begin{cases} \gamma_4 - \pi & \text{für } \gamma_4 \geq 0 \\ \gamma_4 + \pi & \text{für } \gamma_4 < 0 \end{cases}$$

Bei der Realisierung der Koordinatentransformation ist noch ein Sonderfall zu betrachten, der entsteht, wenn der Winkel $\vartheta = 0$ ist. Dies sieht man wieder in [Bild 6.22](#). In diesem Sonderfall ist die Drehung des Werkzeuges \underline{w} sowohl mit dem Winkel φ als auch mit dem Winkel γ durchführbar. Es ist gleichgültig welchen der beiden Winkel man dreht. In dem, in diesem Kapitel dargestellten, Formelsatz zur Berechnung der Rücktransformation werden die rechen-technischen Probleme durch das Verschwinden des Kreuzproduktes von \underline{b} und \underline{h} ($\underline{b} \times \underline{h}$) deutlich. Die Formeln zur Bestimmung von φ und γ sind nicht mehr definiert, weil der Betrag von $|\underline{b} \times \underline{h}| = 0$ verschwindet. Dies muss auch so sein, da uns ja die Kinematik des Gelenkroboters in dieser Stellung genau dieses Problem vorgibt. Ein Ausweg aus diesem Problem bietet sich an, wenn man den Winkel γ unverändert lässt und die geforderte Drehung des Werkzeuges nur noch mit dem Winkel φ durchführt. In der Formel zur Berechnung des Winkels φ ist dann $\underline{b} \times \underline{h}$ durch $\underline{b} \times \underline{w}$ zu ersetzen und in der Vorzeichenberechnung ist der Vektor \underline{h} durch den Vektor \underline{w} zu ersetzen. Für den Fall $\vartheta = 0$ erhält man also für die Bestimmung der Winkel $\varphi + \gamma$:

$$\left. \varphi_1 + \gamma_1 = \text{sign}(\gamma) \cdot \arccos \left(\frac{\underline{e}_\psi \cdot \frac{\underline{b}_1 \times \underline{w}}{|\underline{b}_1 \times \underline{w}|}}{|\underline{b}_1 \times \underline{w}|} \right) \right\} \text{ für } \vartheta = 0$$

$$\varphi_2 + \gamma_2 = \text{sign}(\gamma) \cdot \arccos \left(\frac{\underline{e}_\psi \cdot \underline{b}_2 \times \underline{w}}{|\underline{b}_2 \times \underline{w}|} \right)$$

mit $\text{sign}(\varphi) = \text{sign}(\underline{e}_\psi \cdot \underline{w})$ für $\vartheta = 0$.

Für $\varphi_3 + \gamma_3$ und $\varphi_4 + \gamma_4$ ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_3 + \gamma_3 = \begin{array}{ll} \varphi_1 + \gamma_1 - \pi & \text{für } \varphi_1 + \gamma_1 \geq 0 \\ \varphi_1 + \gamma_1 + \pi & \text{für } \varphi_1 + \gamma_1 < 0 \end{array} \\ \varphi_4 + \gamma_4 = \begin{array}{ll} \varphi_2 + \gamma_2 - \pi & \text{für } \varphi_2 + \gamma_2 \geq 0 \\ \varphi_2 + \gamma_2 + \pi & \text{für } \varphi_2 + \gamma_2 < 0 \end{array} \end{array} \right\} \text{für } \vartheta = 0$$

Für die Realisierung der Rücktransformation ist diese **Sonderfallbehandlung** sehr wichtig, da hierdurch die **Division durch 0** vermieden wird.

Die Robotersteuerung muss entscheiden welcher der möglichen Fälle der Koordinatentransformation gewählt wird. Hierzu sind verschiedene Strategien möglich:

- **Auswahl des Falls durch den Programmierer im Hauptprogramm,**
- **Nutzen der vorhergehenden Stellung als Entscheidungsbasis, z.B. Wahl der Winkelstellungen, die den vorhergehenden Stellungen am nächsten liegen,**
- **Erkennen von Hindernissen und Wahl des Falles, der keine Kollision verursacht.**

6.4.7.2.4 Berechnungsbeispiel für die Rückwärtstransformation

Zur Veranschaulichung des Arbeitens mit den im letzten Kapitel zusammengestellten Beziehungen für die Rücktransformation wird mit dem Roboter ein Arbeitsvorgang ausgeführt, bei dem die Spitze des Werkzeuges **Q** die **Position $z = 0,1 \text{ m}$** annimmt, und die **Gerade $y = 1,3 \text{ m}$** beschreibt.

Die Bewegung erfolgt entlang der positiven **x**-Richtung im Bereich von **$0,0 \text{ m} \leq x \leq 1,0 \text{ m}$** . Die Ausgangssituation wird im folgenden Bild gezeigt.

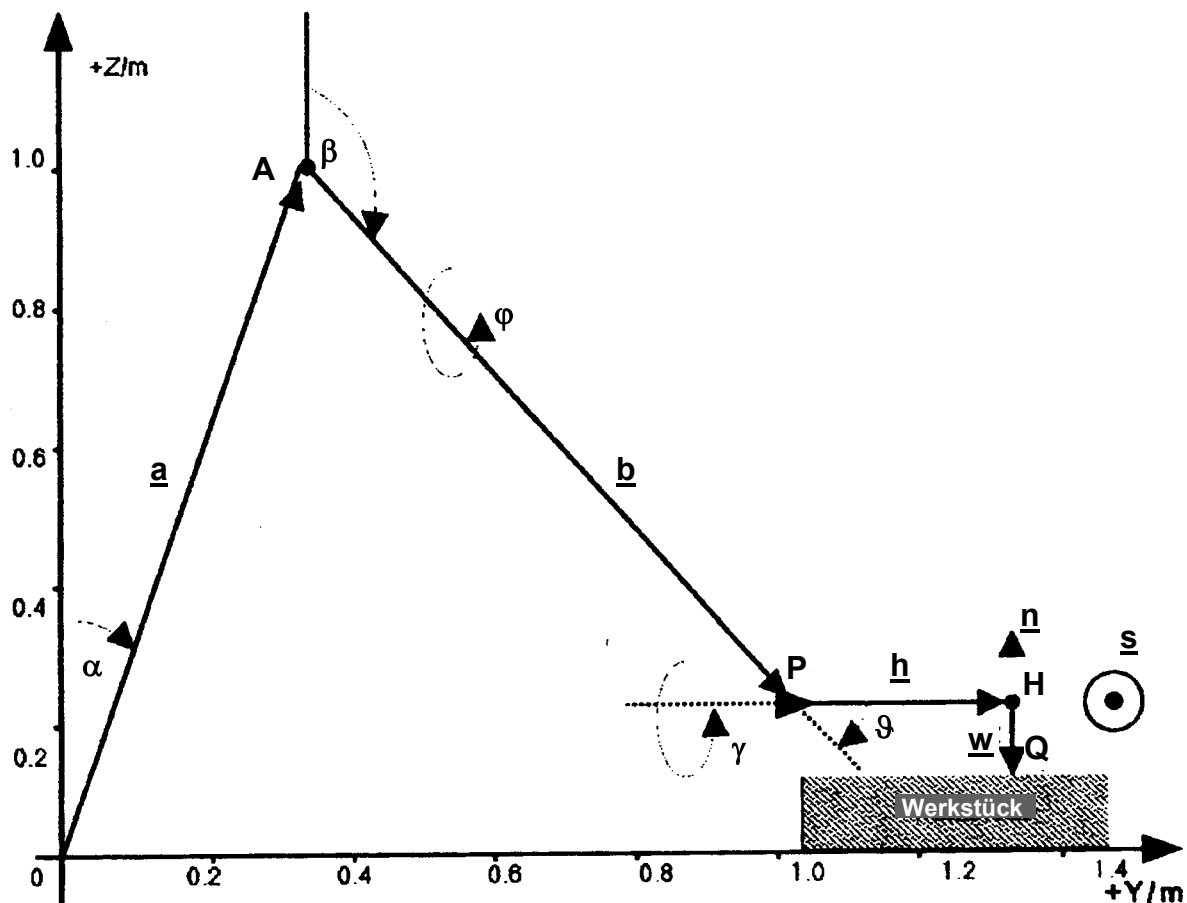


Bild 6.32: Roboter mit Werkstück für den betrachteten Arbeitsvorgang bei der Lage $x = 0$

Der Roboter hat folgende Armlängen:

- **Unterarm** $a = 1,0 \text{ m}$
- **Oberarm** $b = 1,0 \text{ m}$
- **Halter** $h = 0,3 \text{ m}$
- **Werkzeug** $w = 0,1 \text{ m}$

Die Bahn $\underline{q}(\tau)$ für den betrachteten Arbeitsvorgang ist mit

$$\underline{q}(\tau) = \underline{e}_x \cdot \tau \cdot 1,0 \text{ m} + \underline{e}_y \cdot 1,3 \text{ m} + \underline{e}_z \cdot 0,1 \text{ m} \quad (6.31)$$

gegeben, wobei τ die Werte von 0 bis 1 durchläuft.

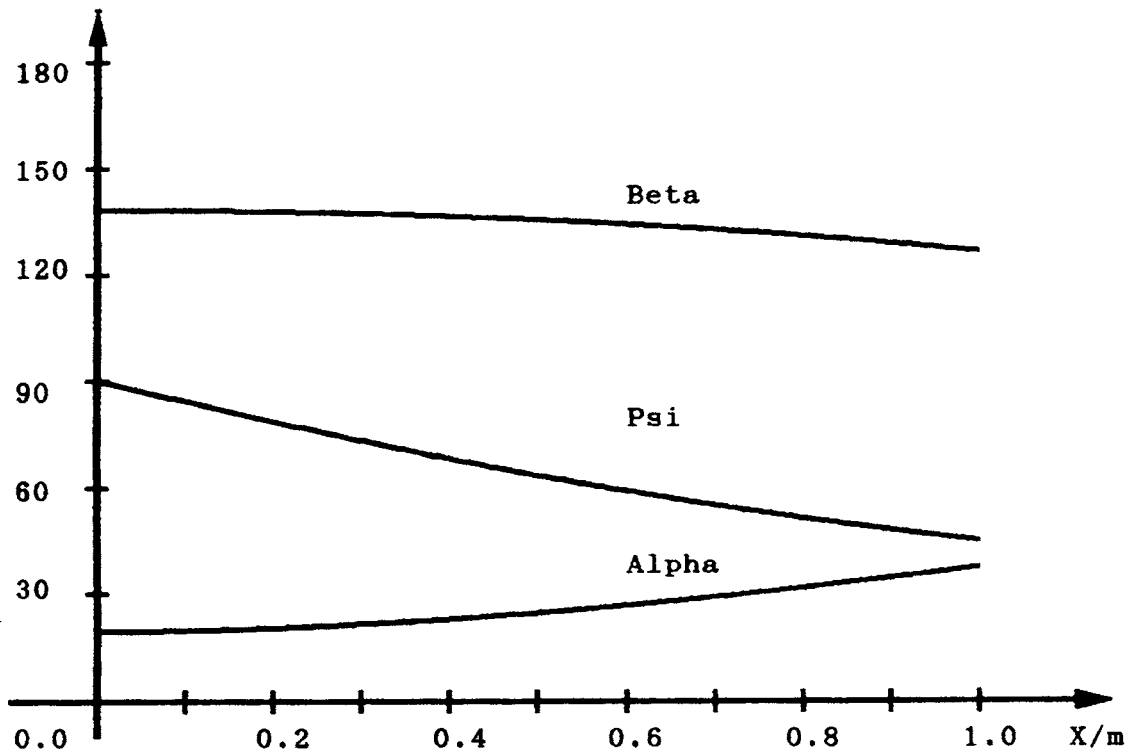
Die Beschreibung der Orientierung des Werkzeuges zur Bahn erhält man mit folgenden Daten:

- **Bahnvektor** $\underline{s} = \underline{e}_x$
- **Normalenvektor** $\underline{n} = \underline{e}_z$
- **Winkel zwischen Werkzeug und Normale** $\sigma = 0$
- **Winkel zwischen Werkzeug und Halter** $\delta = \frac{\pi}{2}$
- **Winkel zwischen \underline{m} und $\underline{s} \times \underline{n}$** $\lambda = \frac{\pi}{2}$

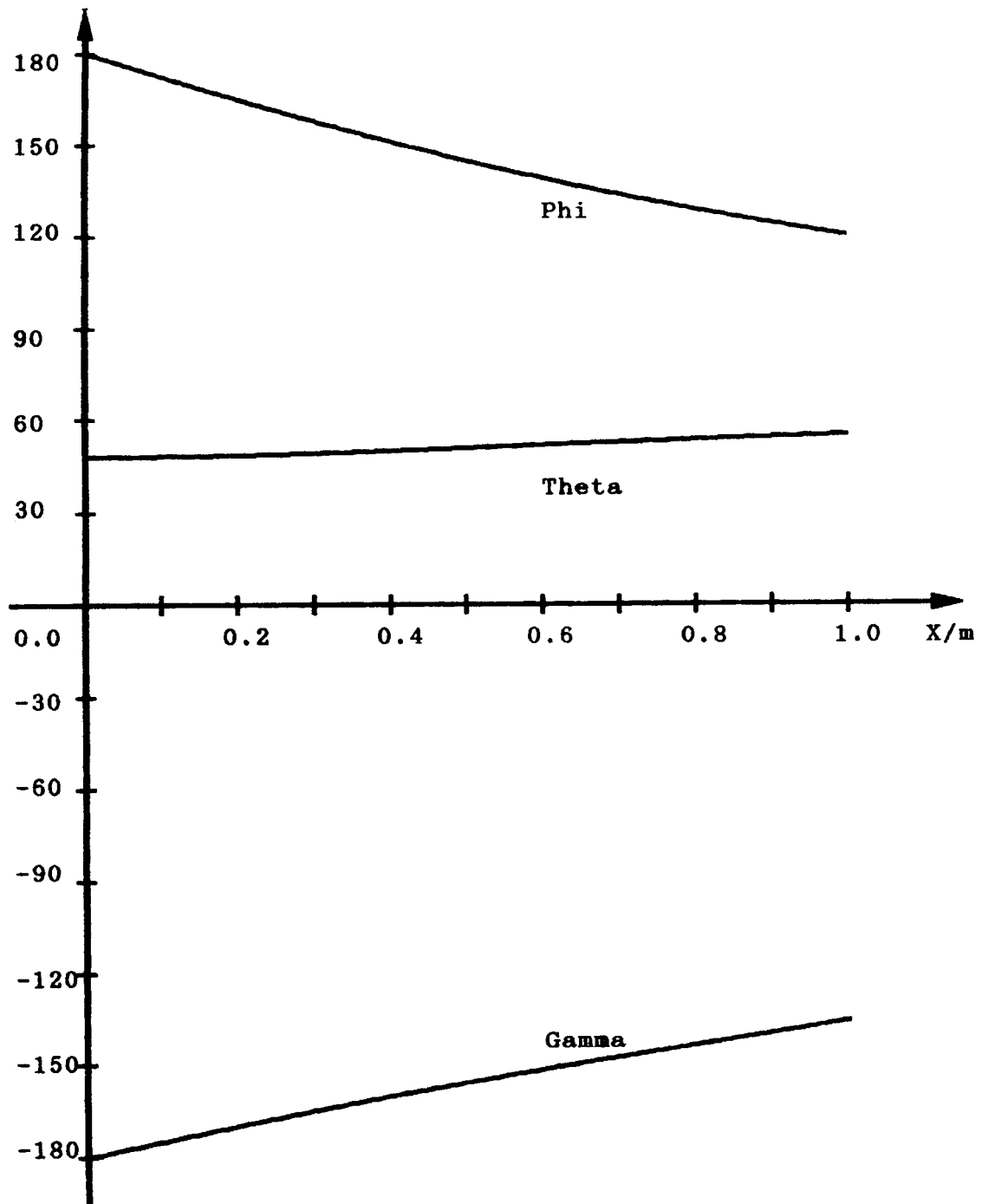
Mit diesen Vorgaben für die Robotergeometrie, die Bahn und die Orientierung kann die Rück-

transformation berechnet werden. Für den **Fall 1** sind die Ergebnisse für die Winkelstellungen der Hauptachsen und der Grundachsen in den folgenden Bildern dargestellt.

In den Bildern ist der Gelenkwinkel der einzelnen Achsen in Grad aufgetragen und in der Abzisse ist die Position der X-Koordinate in Meter aufgetragen.



[Bild 6.33](#): Winkelverlauf der Hauptachsen für den betrachteten Arbeitsvorgang



[Bild 6.34](#): Winkelverlauf der Handachsen für den betrachteten Arbeitsvorgang

6.4.7.3 Die Vorwärtstransformation

Die Vorwärtstransformation berechnet aus den Drehwinkeln der Antriebe die Position des Roboters und die Orientierung des Werkzeuges. Im Gegensatz zur Rückwärtstransformation ist die Vorwärtstransformation mathematisch eindeutig bestimmt. Bei Vorgabe der 6 Roboterwinkel ($\alpha, \beta, \psi, \vartheta, \phi, \gamma$) in [Bild 6.22](#), können die Punkte **A**, **P**, **H** und **Q** sowie die Vektoren des Halters **h** und Werkzeuges **w** berechnet werden.

Die Berechnung des Vektors **a** erfolgt nach [Gleichung 6.16](#) mit Hilfe der Winkel α und ψ .

$$\underline{a} = (\underline{e}_x \cdot \cos(\psi) + \underline{e}_y \cdot \sin(\psi)) \cdot a \cdot \sin(\alpha) + \underline{e}_z \cdot a \cdot \cos(\alpha) \quad (6.32)$$

In gleicher Weise berechnet sich der Vektor **b** mittels der Winkel β und ψ .

$$\underline{b} = (\underline{e}_x \cdot \cos(\psi) + \underline{e}_y \cdot \sin(\psi)) \cdot b \cdot \sin(\beta) + \underline{e}_z \cdot b \cdot \cos(\beta) \quad (6.33)$$

Damit kann auch der Vektor **p** angegeben werden.

$$\begin{aligned} \underline{p} = \underline{a} + \underline{b} = & \underline{e}_x (a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \sin(\beta)) \cdot \cos(\psi) + \\ & \underline{e}_y (a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \sin(\beta)) \cdot \sin(\psi) + \\ & \underline{e}_z (a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \cos(\beta)) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Zur Berechnung des Vektors **h** des Halters wird zunächst ein Hilfsvektor **h_d** berechnet, der entsteht, wenn der Winkel $\vartheta = 0$ ist, also keine Drehung um den Winkel ϕ vorgenommen wird. Zum Abschluss braucht dann nur noch der Hilfsvektor **h_d** um den Vektor **b** mit dem Winkel ϕ gedreht werden und man erhält den gesuchten Vektor **h** des Halters.

Zunächst wird also im ersten Schritt der Hilfsvektor **h_d** berechnet, der zu den Vektoren **a** und **b** komplanar ist. Dieser Vektor lässt sich wieder in Kugelkoordinaten analog zum Vektor **a** berechnen.

$$\begin{aligned} \underline{h}_d = & (\underline{e}_x \cdot \cos(\psi) + \underline{e}_y \cdot \sin(\psi)) \cdot h \cdot \sin(\beta + \vartheta) + \underline{e}_z \cdot h \cdot \cos(\beta + \vartheta) \\ = & \underline{e}_x \cdot h_{dx} + \underline{e}_y \cdot h_{dy} + \underline{e}_z \cdot h_{dz} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Im zweiten Schritt muss der Hilfsvektor **h_d** um den Vektor **b** mit dem Winkel ϕ gedreht werden. Das zugrundeliegende mathematische Problem entspricht der Drehung eines Vektors um eine beliebige Gerade im Raum, was auf die Drehung eines Koordinatensystems um die entsprechende Gerade zurückgeführt wird. Für die Drehung des Koordinatensystems entnimmt man aus besseren mathematischen Formelsammlungen (z.B. Bronstein) folgenden Satz:

Ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbf{K} = \{ \mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \}$ geht durch Drehung im mathematisch positiven Sinn um die durch den Ursprung gehende Achse **g** mit den Richtungskosinus

$$\alpha = \underline{e}_x \cdot \frac{\mathbf{g}}{g} \quad \beta = \underline{e}_y \cdot \frac{\mathbf{g}}{g} \quad \gamma = \underline{e}_z \cdot \frac{\mathbf{g}}{g} \quad (6.36)$$

und um den Winkel ϕ in das kartesische Koordinatensystem $\mathbf{K}' = \{ \mathbf{0}, \mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}' \}$ durch folgende Umrechnungsformeln über (siehe das folgende Bild):

$$\begin{aligned}
 x' &= x(\cos(\vartheta) + \alpha^2(1 - \cos(\vartheta))) + y(\gamma \cdot \sin(\vartheta) + \alpha \cdot \beta(1 - \cos(\vartheta))) + \\
 &\quad z(-\beta \cdot \sin(\vartheta) + \alpha \cdot \gamma(1 - \cos(\vartheta))) \\
 y' &= x(-\gamma \cdot \sin(\vartheta) + \beta \cdot \alpha(1 - \cos(\vartheta))) + y(\cos(\vartheta) + \beta^2(1 - \cos(\vartheta))) + \\
 &\quad z(\alpha \cdot \sin(\vartheta) + \beta \cdot \gamma(1 - \cos(\vartheta))) \\
 z' &= x(\beta \cdot \sin(\vartheta) + \gamma \cdot \alpha(1 - \cos(\vartheta))) + y(-\alpha \cdot \sin(\vartheta) + \gamma \cdot \beta(1 - \cos(\vartheta))) + \\
 &\quad z(\cos(\vartheta) + \gamma^2(1 - \cos(\vartheta)))
 \end{aligned}
 \tag{6.37}$$

Hierbei sind die Koordinaten des originalen Punktes (x, y, z) und die des gedrehten Punktes (x', y', z'). Auch in der grafischen Datenverarbeitung kann diese Gleichung zur Drehung von Punkten eingesetzt werden.

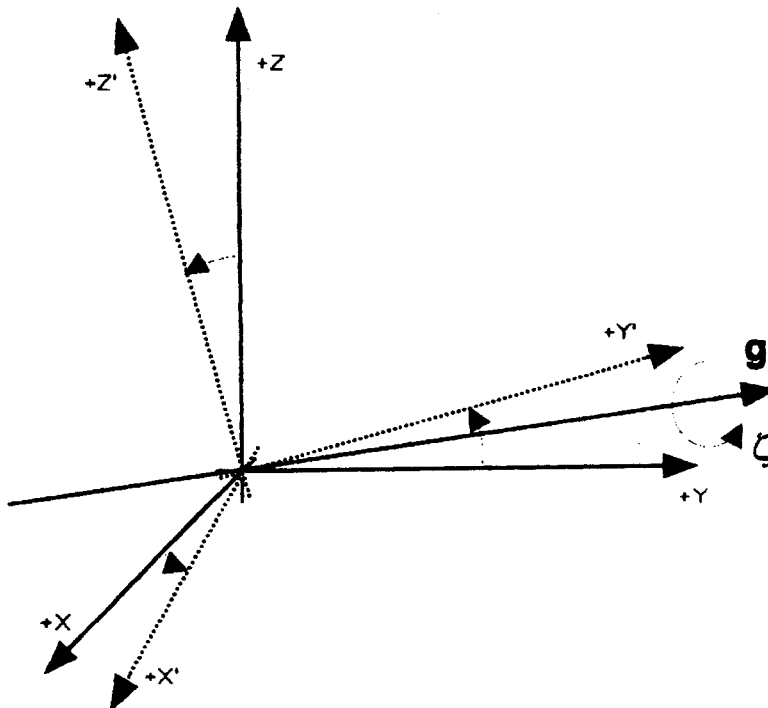


Bild 6.35: Drehung eines Koordinatensystems um eine beliebige Gerade g

Wendet man die [Gleichung 6.37](#) an, um den Hilfsvektor \underline{h}_d um den Vektor \underline{b} mit dem Winkel φ zu drehen, so werden zunächst die Richtungskosinusse u, v, w des Vektors \underline{b} berechnet, der hier die Gerade g darstellt. Man erhält mit der [Gleichung 6.33](#):

$$\begin{aligned}
 u &= \underline{e}_x \frac{b}{b} = \cos(\psi) \cdot \sin(\beta) \\
 v &= \underline{e}_y \frac{b}{b} = \sin(\psi) \cdot \sin(\beta) \\
 w &= \underline{e}_z \frac{b}{b} = \cos(\beta)
 \end{aligned}
 \tag{6.38}$$

In [Gleichung 6.37](#) entsprechen u, v, w den Werten α, β, γ . Die Drehung des Vektors \underline{h}_d wird um den Winkel $-\varphi$ vorgenommen. Für den Vektor \underline{h} erhält man dann aus [Gleichung 6.37](#):

$$\underline{h} = \underline{e}_x \cdot h_x + \underline{e}_y \cdot h_y + \underline{e}_z \cdot h_z \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} h_x &= h_{dx} \left(\cos(-\varphi) + u^2 (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad h_{dy} \left(w \cdot \sin(-\varphi) + u \cdot v (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad h_{dz} \left(-v \cdot \sin(-\varphi) + u \cdot w (1 - \cos(-\varphi)) \right) \\ h_y &= h_{dx} \left(-w \cdot \sin(-\varphi) + v \cdot u (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad h_{dy} \left(\cos(-\varphi) + v^2 (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad h_{dz} \left(u \cdot \sin(-\varphi) + v \cdot w (1 - \cos(-\varphi)) \right) \\ h_z &= h_{dx} \left(v \cdot \sin(-\varphi) + w \cdot u (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad h_{dy} \left(-u \cdot \sin(-\varphi) + w \cdot v (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad h_{dz} \left(\cos(-\varphi) + w^2 (1 - \cos(-\varphi)) \right) \end{aligned} \quad (6.39)$$

Damit ist dann der Vektor des Halters \underline{h} und der **TCP** (Tool-Center-Point) Punkt **H** bekannt.

Als letzter Vektor muss noch der Werkzeugvektor \underline{w} berechnet werden. Hierzu wird zunächst ein Hilfsvektor \underline{w}_d berechnet, der entsteht, wenn der Winkel $\varphi = 0$ und $\gamma = 0$ sind, also keine Drehungen um die Winkel φ und γ vorgenommen werden. Dann muss der Hilfsvektor \underline{w}_d um den Vektor \underline{b} mit dem Winkel φ und um den Vektor \underline{h} mit dem Winkel γ gedreht werden und man erhält den gesuchten Vektor \underline{h} des Halters. Hierzu sind also zwei Drehungen erforderlich.

Zunächst wird also im ersten Schritt der Hilfsvektor \underline{w}_d berechnet, der zu den Vektoren \underline{a} und \underline{b} komplanar ist. Dieser Vektor lässt sich wieder in Kugelkoordinaten analog zum Vektor \underline{a} berechnen.

$$\begin{aligned} \underline{w}_d &= \left(\underline{e}_x \cdot \cos(\psi) + \underline{e}_y \cdot \sin(\psi) \right) \cdot w \cdot \sin(\beta + \vartheta + \pi - \delta) \\ &\quad + \underline{e}_z \cdot w \cdot \cos(\beta + \vartheta + \pi - \delta) \\ &= \underline{e}_x \cdot w_{dx} + \underline{e}_y \cdot w_{dy} + \underline{e}_z \cdot w_{dz} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Im zweiten Schritt muss der Hilfsvektor \underline{w}_d um den Vektor \underline{b} mit dem Winkel $-\varphi$ wie vorher gedreht werden. Das Ergebnis erhält man in gleicher Weise mit:

$$\begin{aligned} \underline{w}_1 &= \underline{e}_x \cdot w_{x1} + \underline{e}_y \cdot w_{y1} + \underline{e}_z \cdot w_{z1} \quad \text{mit} \\ w_{x1} &= w_{dx} \left(\cos(-\varphi) + u^2 (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad w_{dy} \left(w \cdot \sin(-\varphi) + u \cdot v (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad w_{dz} \left(-v \cdot \sin(-\varphi) + u \cdot w (1 - \cos(-\varphi)) \right) \\ w_{y1} &= w_{dx} \left(-w \cdot \sin(-\varphi) + v \cdot u (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad w_{dy} \left(\cos(-\varphi) + v^2 (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad w_{dz} \left(u \cdot \sin(-\varphi) + v \cdot w (1 - \cos(-\varphi)) \right) \\ w_{z1} &= w_{dx} \left(v \cdot \sin(-\varphi) + w \cdot u (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad w_{dy} \left(-u \cdot \sin(-\varphi) + w \cdot v (1 - \cos(-\varphi)) \right) + \\ &\quad w_{dz} \left(\cos(-\varphi) + w^2 (1 - \cos(-\varphi)) \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Die Richtungskosinusse u, v, w des Vektors \underline{b} sind bereits in [Gleichung 6.38](#) berechnet worden.

Zum Abschluss ist als dritter Schritt der Vektor \underline{w}_1 noch um den Vektor \underline{h} mit dem Winkel $-\gamma$ zu drehen. Hierzu werden die Richtungskosinusse des Vektors berechnet. Man erhält mit [Gleichung 6.9](#):

$$\begin{aligned} u &= \underline{e}_x \frac{h}{h} = h_x \\ v &= \underline{e}_y \frac{h}{h} = h_y \\ w &= \underline{e}_z \frac{h}{h} = h_z \end{aligned} \quad (6.42)$$

Als Ergebnis erhält man für den Werkzeugvektor \underline{w} nach der Drehung um γ :

$$\underline{w} = \underline{e}_x \cdot w_x + \underline{e}_y \cdot w_y + \underline{e}_z \cdot w_z$$

mit

$$\begin{aligned} w_x &= w_{x1} \left(\cos(-\gamma) + u^2 (1 - \cos(-\gamma)) \right) + \\ &\quad w_{y1} \left(w \cdot \sin(-\gamma) + u \cdot v (1 - \cos(-\gamma)) \right) + \\ &\quad w_{z1} \left(-v \cdot \sin(-\gamma) + u \cdot w (1 - \cos(-\gamma)) \right) \\ w_y &= w_{x1} \left(-w \cdot \sin(-\gamma) + v \cdot u (1 - \cos(-\gamma)) \right) + \\ &\quad w_{y1} \left(\cos(-\gamma) + v^2 (1 - \cos(-\gamma)) \right) + \\ &\quad w_{z1} \left(u \cdot \sin(-\gamma) + v \cdot w (1 - \cos(-\gamma)) \right) \\ w_z &= w_{x1} \left(v \cdot \sin(-\gamma) + w \cdot u (1 - \cos(-\gamma)) \right) + \\ &\quad w_{y1} \left(-u \cdot \sin(-\gamma) + w \cdot v (1 - \cos(-\gamma)) \right) + \\ &\quad w_{z1} \left(\cos(-\gamma) + w^2 (1 - \cos(-\gamma)) \right) \end{aligned} \quad (6.43)$$

Damit ist dann auch der Bahnpunkt Q mit dem Bahnvektor

$$\underline{q} = \underline{p} + \underline{h} + \underline{w} \quad (6.44)$$

bekannt.

6.4.7.4 Berechnung der Hand mit den Winkeln O , A , T

Im Programm einer Robotersteuerung müssen die Bahnpunkte gespeichert werden. Hierzu bieten sich zwei Verfahren an:

- **Speichern der sechs Roboterwinkel (α , β , ψ , ϑ , φ , γ) und**
- **Speichern der Position und der Orientierung**

Das Speichern der sechs Roboterwinkel bestimmt die Roboterposition eindeutig. Mit Hilfe der Vorwärtstransformation kann die Position der Werkzeugspitze eindeutig berechnet werden. Ein solches Verfahren weist jedoch einen erheblichen Nachteil auf. Das Programm ist gerätegebunden und ist nur auf dem Roboter, für den es erstellt wurde ablauffähig. Wechselt man nun den Greifer oder das Werkzeug aus und verändert damit \mathbf{h} oder \mathbf{w} , so muss ein neues Roboterprogramm erstellt werden. Dieser hohe Aufwand kann eingespart werden, wenn man ein **werkzeuggebundenes Koordinatensystem** einführt und dessen Position und Orientierung im Roboterprogramm speichert. Hierzu wird die Position des **TCP** (Tool-Center-Point) und die Winkel O , A , T verwendet, die die Orientierung der Hand beschreiben. Im folgenden Bild ist am Beispiel eines Parallelgreifers das werkzeuggebundene Koordinatensystem mit den Koordinaten T_x , T_y und T_z dargestellt.

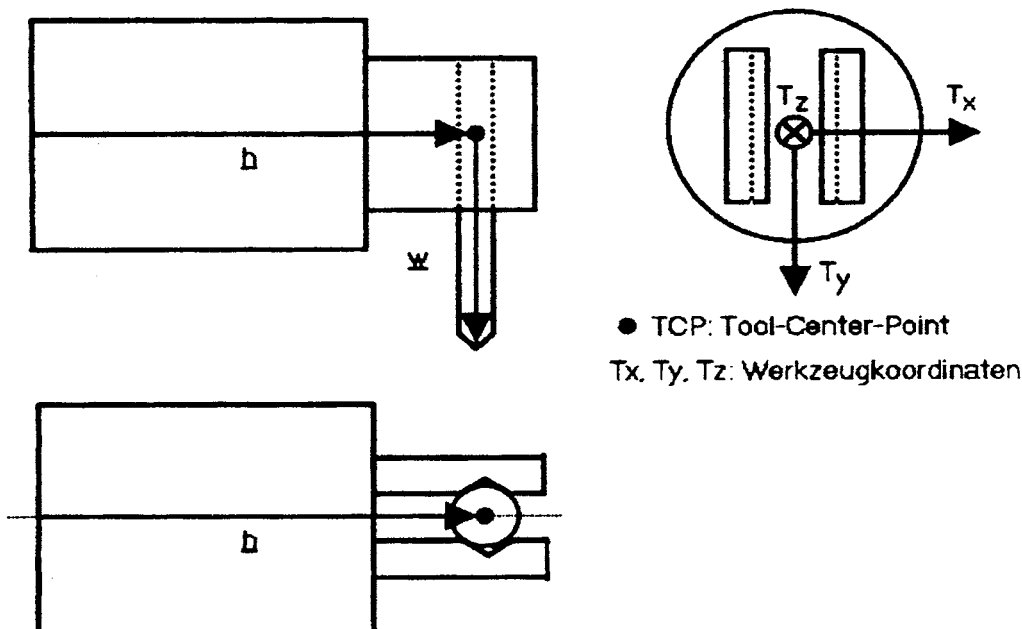
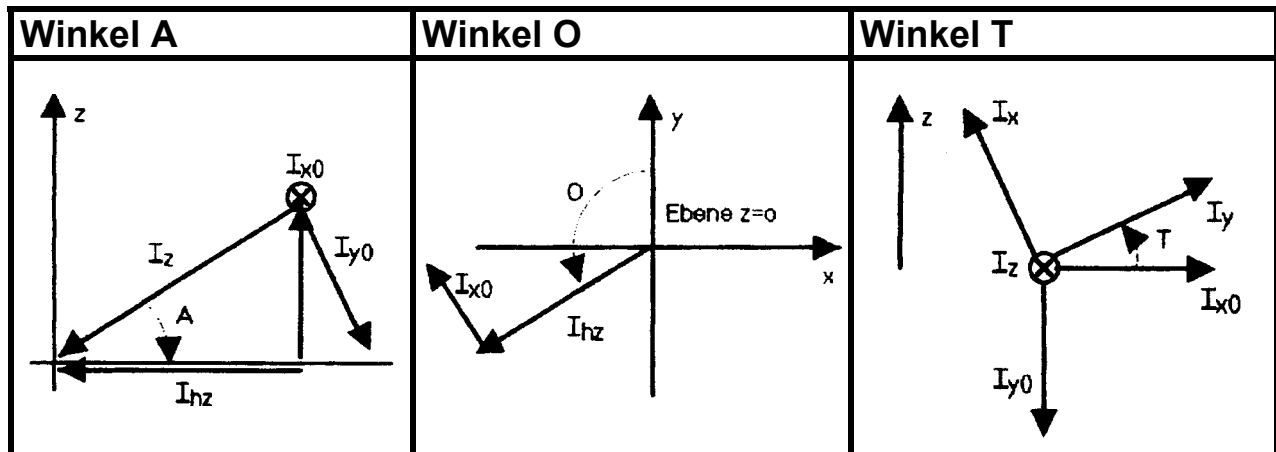


Bild 6.36: Werkzeuggebundenes Koordinatensystem T_x , T_y und T_z

Betrachtet man neben dem obigen Bild auch das [Bild 6.22](#), so sieht man den Haltervektor \mathbf{h} und den Werkzeugvektor \mathbf{w} im Parallelgreifer angeordnet. Das werkzeugbezogene kartesische Koordinatensystem ist mit den Einheitsvektoren \mathbf{I}_x , \mathbf{I}_y und \mathbf{I}_z gegeben. Hierbei zeigt der Vektor \mathbf{I}_z entgegengesetzt zur Richtung des Werkzeughaltervektors \mathbf{h} . Entsprechend der Drehung des Werkzeughaltervektors \mathbf{h} , drehen sich die orthogonalen Vektoren \mathbf{I}_x und \mathbf{I}_y . Mit den Winkeln O , A und T wird die Stellung des werkzeuggebundenen Koordinatensystem T_x , T_y und T_z im Weltkoordinatensystem x , y , z festgelegt. Damit ist dann auch die Stellung der Roboterhand festgelegt. Die Bedeutung der Winkel O , A und T ist:

- **O** : **O**rientation (**O**rientierung)
- **A** : **A**litude (**H**öhe)
- **T** : **T**ool (**W**erkzeug, hier **D**rehung des **W**erkzeuges \mathbf{w})

Die Definitionen für O , A und T können aus folgendem Bild entnommen werden.



[Bild 6.37](#): Definitionen für die Winkel **O**, **A** und **T**

Der Winkel **A** ist der Winkel zwischen dem Vektor \underline{I}_z und \underline{I}_{hz} . \underline{I}_{hz} ist die Projektion von \underline{I}_z in die Ebene $z = 0$. Der Winkel **O** ist in der Ebene $z = 0$ definiert und ergibt sich zwischen der **y-Achse** und dem Vektor \underline{I}_z .

Mit den Winkeln **O** und **A** kann der Vektor \underline{I}_z und damit auch der Vektor $\underline{h} = -\underline{I}_z$ berechnet werden. Weiterhin sind die Vektoren \underline{I}_{x0} senkrecht zu \underline{I}_{hz} und \underline{I}_{y0} senkrecht zu \underline{I}_{x0} zu definieren, so dass $\underline{I}_{x0} \times \underline{I}_{y0} = \underline{I}_z$ gilt.

\underline{I}_{x0} und \underline{I}_{y0} sind das Bezugssystem für das Werkzeugkoordinatensystem \underline{I}_x und \underline{I}_y vom vorigen Bild. Der Winkel **T** liegt zwischen \underline{I}_{x0} und \underline{I}_{y0} . Zur Berechnung der Winkel **O**, **A** und **T** werden zunächst die Werkzeugkoordinaten \underline{I}_x , \underline{I}_y und \underline{I}_z berechnet, die alle Einheitsvektoren sind.

$$\underline{T}_x = \frac{\underline{h} \times \underline{w}}{|\underline{h} \times \underline{w}|} = \underline{m}$$

$$\underline{T}_z = \frac{-\underline{h}}{|\underline{h}|} = \underline{e}_x \cdot T_{zx} + \underline{e}_y \cdot T_{zy} + \underline{e}_z \cdot T_{zz} \quad (6.45)$$

$$\underline{T}_y = \underline{T}_z \times \underline{T}_x$$

Der Vektor \underline{I}_{hz} ist ein Einheitsvektor in Richtung der Projektion des Vektors \underline{I}_z in die Ebene $z = 0$. Er kann mit folgender Gleichung berechnet werden:

$$\underline{T}_{hz} = \frac{\underline{e}_x \cdot T_{zx} + \underline{e}_y \cdot T_{zy}}{\sqrt{T_{zx}^2 + T_{zy}^2}} \quad (6.46)$$

Wie aus [Bild 6.37](#) zu ersehen ist, ist die Berechnung des Vektors \underline{I}_{hz} auch mit Hilfe des Winkels **O** möglich.

$$\underline{T}_{hz} = -\underline{e}_x \cdot \sin(O) + \underline{e}_y \cdot \cos(O) \quad (6.47)$$

Hieraus erhält man dann auch den Vektor \underline{I}_{x0} , der zu \underline{I}_{hz} senkrecht steht.

$$\underline{T}_{x0} = \underline{e}_x \cdot \cos(O) + \underline{e}_y \cdot \sin(O) \quad (6.48)$$

Damit können dann die Winkel **O**, **A** und **T** aus den Vektoren $\underline{\mathbf{I}}_z$, $\underline{\mathbf{I}}_{hz}$ und $\underline{\mathbf{I}}_{x0}$ berechnet werden.

$$O = \arccos(\underline{\mathbf{e}}_y \cdot \underline{\mathbf{I}}_{hz}) \cdot \text{sign}(-\underline{\mathbf{e}}_x \cdot \underline{\mathbf{I}}_{hz})$$

$$A = \arccos(\underline{\mathbf{I}}_{hz} \cdot \underline{\mathbf{I}}_z) \cdot \text{sign}(\underline{\mathbf{e}}_z \cdot \underline{\mathbf{I}}_z) \quad (6.49)$$

$$T = \arccos(\underline{\mathbf{I}}_{x0} \cdot \underline{\mathbf{I}}_y) \cdot \text{sign}(\underline{\mathbf{e}}_z \cdot \underline{\mathbf{I}}_y)$$

Mit der Gleichung ist es also möglich, aus der Stellung des Roboters die Winkel **O**, **A** und **T** zu berechnen. Erforderlich wird diese Berechnung, wenn ein Bahnpunkt mit Hilfe der Teach-In-Programmierung im Roboterprogramm gespeichert wird. Hierzu werden die Winkel **O**, **A** und **T** und die kartesische Position des Tool-Center-Point's (TCP) im Roboterprogramm gespeichert.

Die umgekehrte Berechnung, bei der aus der kartesischen Position des Tool-Center-Point's (TCP) und den Winkeln **O**, **A** und **T** die Stellung des Roboters berechnet wird, ist bei der Interpretation eines jeden Bewegungssatzes erforderlich. Hierzu muss $\underline{\mathbf{I}}_z$, $\underline{\mathbf{I}}_{x0}$, $\underline{\mathbf{I}}_{y0}$, $\underline{\mathbf{I}}_x$ und $\underline{\mathbf{I}}_y$ aus den Winkeln **O**, **A** und **T** berechnet werden.

Mit der [Gleichung 6.49](#) erhält man für den Vektor $\underline{\mathbf{I}}_z$ mit

$$\cos(O) = \underline{\mathbf{e}}_y \cdot \underline{\mathbf{I}}_{hz} = \frac{T_{zy}}{\left(T_{zx}^2 + T_{zy}^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{T_{zy}}{\sqrt{T_{zx}^2 + T_{zy}^2}}$$

$$\cos(A) = \underline{\mathbf{I}}_{hz} \cdot \underline{\mathbf{I}}_z = \frac{T_{zx}^2 + T_{zy}^2}{\left(T_{zx}^2 + T_{zy}^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{T_{zx}^2 + T_{zy}^2}$$

für die **y**-Komponente T_{zy} des Vektors $\underline{\mathbf{I}}_z$ mit

$$T_{zy} = \cos(O) \cdot \left(T_{zx}^2 + T_{zy}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \cos(O) \cdot \cos(A)$$

und für die **x**-Komponente T_{zx} des Vektors $\underline{\mathbf{I}}_z$ erhält man

$$\begin{aligned} T_{zx} &= \left(\cos^2(A) - T_{zy}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\cos^2(A) - \cos^2(O) \cdot \cos^2(A)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \cos(A) \cdot \left(1 - \cos^2(O)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\cos(A) \cdot \sin(O) \end{aligned}$$

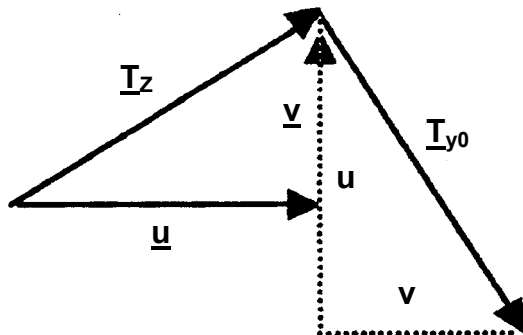
Wegen der Definition des Winkels **O** ist die negative Lösung von $\left(1 - \cos^2(O)\right)^{\frac{1}{2}}$ einzusetzen. Die **z**-Komponente T_{zz} des Vektors $\underline{\mathbf{I}}_z$ aus der Überlegung, dass $|\underline{\mathbf{I}}_z| = 1$ ist.

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \left(1 - \left(T_{zx}^2 + T_{zy}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 - \cos^2(A)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sin(A) \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man für den Vektor $\underline{\mathbf{I}}_Z$ folgende Gleichung, mit der dann auch der Vektor $\underline{\mathbf{h}}$ des Werkzeughalters bekannt ist.

$$\underline{\mathbf{I}}_Z = -\underline{\mathbf{e}}_x \cdot \cos(A) \cdot \sin(O) + \underline{\mathbf{e}}_y \cdot \cos(O) \cdot \cos(A) + \underline{\mathbf{e}}_z \cdot \sin(A) = \frac{-\underline{\mathbf{h}}}{h} \quad (6.50)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann also ausgehend vom Punkt **H** der Punkt **P** berechnet werden ([Bild 6.22](#)), da die Winkel **O** und **A** bekannt sind. Die kartesischen Koordinaten des Punktes **H** und die Winkel **O** und **A** sind im Roboterprogramm als Position und Orientierung gespeichert. Zur Berechnung des Werkzeugvektors $\underline{\mathbf{w}}$ müssen die Werkzeugkoordinaten $\underline{\mathbf{I}}_x$ und $\underline{\mathbf{I}}_y$ mittels des Winkels **T** berechnet werden. Hierzu werden zunächst die Basisvektoren $\underline{\mathbf{I}}_{x0}$ und $\underline{\mathbf{I}}_{y0}$ des Bezugskordinatensystems für das Werkzeugkordinatensystem $\underline{\mathbf{I}}_x$, $\underline{\mathbf{I}}_y$ ermittelt.



[Bild 6.38](#): Vektor $\underline{\mathbf{I}}_Z$ und $\underline{\mathbf{I}}_{y0}$

Zur Berechnung des Vektors $\underline{\mathbf{I}}_{y0}$ wird der Vektor $\underline{\mathbf{I}}_Z$ in die Komponenten $\underline{\mathbf{u}}$ und $\underline{\mathbf{v}}$ zerlegt.

$$\underline{\mathbf{I}}_Z = -\underline{\mathbf{e}}_x \cdot \cos(A) \cdot \sin(O) + \underline{\mathbf{e}}_y \cdot \cos(O) \cdot \cos(A) + \underline{\mathbf{e}}_z \cdot \sin(A)$$

$$\underline{\mathbf{I}}_Z = \underline{\mathbf{e}}_u \cdot u + \underline{\mathbf{e}}_v \cdot v$$

Der Vektor $\underline{\mathbf{I}}_{y0}$, der senkrecht zu $\underline{\mathbf{I}}_Z$ und $\underline{\mathbf{I}}_{x0}$ angeordnet ist, ergibt sich entsprechend obiger Abbildung zu

$$\underline{\mathbf{e}}_u = -\underline{\mathbf{e}}_x \cdot \sin(O) + \underline{\mathbf{e}}_y \cdot \cos(O)$$

$$\underline{\mathbf{e}}_v = \underline{\mathbf{e}}_z$$

$$u = \cos(A)$$

$$v = \sin(A)$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{y0} = \underline{\mathbf{e}}_u \cdot v - \underline{\mathbf{e}}_v \cdot u$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{y0} = -\underline{\mathbf{e}}_x \cdot \sin(O) \cdot \sin(A) + \underline{\mathbf{e}}_y \cdot \cos(O) \cdot \sin(A) - \underline{\mathbf{e}}_z \cdot \cos(A) \quad (6.51)$$

Der Vektor $\underline{\mathbf{I}}_{x0}$ wurde bereits in [Gleichung 4.48](#) angegeben.

$$\underline{\mathbf{I}}_{x0} = \underline{\mathbf{e}}_x \cdot \cos(O) + \underline{\mathbf{e}}_y \cdot \sin(O)$$

Die Vektoren $\underline{\mathbf{I}}_{x_0}$ und $\underline{\mathbf{I}}_{y_0}$ bilden das Bezugssystem für das Werkzeugkoordinatensystem (siehe auch [Bild 6.38](#)).

Zur Berechnung des Werkzeugvektors $\underline{\mathbf{w}}$, ist zunächst die Berechnung des Vektors $\underline{\mathbf{I}}_y$, der sich aus der Drehung des Vektors $\underline{\mathbf{I}}_{x_0}$ um die Gerade $\underline{\mathbf{I}}_z$ mit dem Winkel $-\tau$ ergibt, erforderlich.

Der Vektor $\underline{\mathbf{I}}_x$ ergibt sich dann aus $\underline{\mathbf{I}}_x = \underline{\mathbf{I}}_y \times \underline{\mathbf{I}}_z$. Dann kann der gesuchte Werkzeugvektor $\underline{\mathbf{w}}$ berechnet werden, in dem der Vektor $\underline{\mathbf{I}}_z$ um den Vektor $\underline{\mathbf{I}}_x$ mit dem Winkel $-\delta$ gedreht wird.

Die Drehungen von Vektoren um beliebige Achsen im Raum sind bereits im Kapitel über die Vorwärtstransformation in [Gleichung 6.37](#) behandelt worden und können hier angewendet werden.